Anleitung zu Verzeichnung
der
Kämme des Räderwerks
in Mühlen

von

M. Johann Gottfried Hoffmann.

Ein Anhang
zu desselben Schrift:
Der Wassermühlenbau
mit besondrer Rücksicht auf Mahlmühlen.

Mit einem Kupfer.

Königsberg, 1801.
bei Goebbels und Unzer.

Man würde mir Unrecht thun, wenn man hier eine Ilias post Homerum, eine gelehrte Untersuchung über die Natur der krummen Linie suchte, durch deren Bogen die Gestalt der Kämme des Räderwerks eigentlich bestimmt wird. Eben so wenig aber darf man hier bloße Anweisungen zu Verzeichnungen ohne Angabe der Gründe, auf welchen sie beruhen, erwarten. Die gute Sache des Mühlenbauwesens gewinnt vielleicht nicht viel dabei, wenn der angehende Mühlenbaumeister seinem Lehrbuche nachbetet, daß die Gestalt der Kämme epicycloidisch sein solle; ohne übrigens zu wissen, wie der epicycloidische Bogen, welcher den Kamm begränzt, aus den gegebnen Bedingungen verzeichnet werden müsse. Eben so wenig aber kann es für die Ausübung wahr-

haft vortheilhaft sein, wenn man einige Verzeichnungsarten blos historisch kennt, ohne zu wissen, wie weit sie wahr sind, und wie sie nach veränderten Datis abgeändert werden müssen. Es scheint mir vielmehr hauptsächlich darauf anzukommen, daß man das Nachdenken über diesen Gegenstand wecke und übe, und insbesondre dem Anfänger zeige, worauf es hier eigentlich ankomme. Weiß er dieß, so ist er gegen offenbar widersinnige Konstruktionen und bedeutende Abweichungen gesichert, und kann sich in einzelnen Fällen so weit zurecht finden, als es für die Ausübung nöthig sein dürfte. Demnach habe ich versucht, aus bloßen Elementarbegriffen solche Ausdrücke herzuleiten, welche dienen können, die wichtigsten Punkte in den Umrissen der Kämme durch Rechnung zu finden. Kreisbögen, durch diese Punkte gelegt, geben Umrisse, die für die Praxis hinlänglich richtig sind.

Diese kleine Schrift mag ein Anhang zu meinem Werke über den Wassermühlenbau heißen: theils weil ich selbst glaube, daß die Materie, welche hier erörtert wird, dort einer nähern Auseinandersetzung bedurft hätte; ob-

gleich der Gegenstand andrerseits auch zu speciell ist, als daß er in einem allgemeinen Werke soviel Raum hätte einnehmen dürfen, als ich ihm hier widmen konnte: theils auch um meinem einsichtsvollen Recensenten in der Erlanger allg. Litteraturzeitung, der hier ebenfalls eine Lücke zu finden glaubte, einen Beweis zu geben, wie sehr ich seine Erinnerungen schätze. Vielleicht finde ich künftig Gelegenheit mich über das Mehreste, was Ihm in meiner Schrift über den Wassermühlenbau zweifelhaft oder unvollständig geschienen hat, vollständiger und wie ich mir schmeichle zu seiner Zufriedenheit zu erklären. Dies diem docet. Eine fortgesetzte redliche Prüfung bei einiger Gelegenheit Erfahrungen zu machen, und einigen Vorkenntnissen kann nicht ganz ohne Früchte bleiben; und wenn diese spät und sparsam reifen, so wird die Ursache der kärglichen Erndte wenigstens nicht an meinem guten Willen und an meinem aufrichtigen Wunsche mich immer besser zu belehren liegen. Mögen solche Erklärungen in dem Zeitalter der Ostentation und Polyhistorei nicht an ihrem Orte sein; mag es gerathner sein,

dem Publikum die ganze Erndte einer ausgebreiteten Belesenheit vorzulegen, als die spärliche Frucht eignen Nachdenkens; mag es rühmlicher sein, modische Systeme zu präkonisiren, als schlicht weg zu sagen, was man nach seiner besten Ueberzeugung zu wissen glaubt, und ehrlich zu gestehen, was man nicht weiß: ich werde mich immer zu schwach finden, eine andre Rolle zu spielen, als meine eigne.

Hoffmann.

Inhaltsanzeige.

I Untersuchungen über die Gestalt der Stirnradskämme. §. 1—16 Seite 1

II. Untersuchungen über die Gestalt der Trillingsstöcke in Rücksicht auf das Auswinden der Stirnradskämme. §. 17—23. 21

III. Untersuchungen über die Gestalt der Zähne an gezähnten eisernen Stangen, welche durch Getriebe mit cylindrischen Stöcken in Bewegung gesetzt werden. §. 24—28 33

IV. Untersuchungen über die Gestalt der Stirnradskämme, wenn der Trilling innerhalb des Stirnrades liegt. §. 29—33 41

V. Untersuchungen über die Gestalt der Kammradskämme für Trillinge mit parallelen und cylindrischen Stöcken. §. 34—46 47

VI. Betrachtungen über die Kammradskämme, welche in konische Trillinge eingreifen. §. 46 – 55 Seite 62

VII. Untersuchungen über die Queerschnitte der Trillingsstöcke, in so fern deren Figur Einfluß auf das Auswinden der Kammradskämme hat. §. 56—59 80

VIII. Ueber die Stärke der Stöcke und Kämme. §. 60 – 62 86

I.

Untersuchungen über die Gestalt der Stirnradskämme.

1. Es sei in Fig. 1. CG ein Bogen des Theilungskreises eines Stirnrades, dessen Mittelpunkt in B, und dessen Radius $=$ R ist, und CF ein eben so langer Bogen des Theilungskreises eines Trillings, dessen Mittelpunkt in A, und dessen Radius $=$ r ist. Beide Kreise berühren sich in C, und ACB ist daher eine grade Linie. Nun bewege sich der Punkt C an irgend einem Stocke des Trillings nach F; so wird in derselben Zeit der Punkt C an irgend einem Kamme des Stirnrades sich nach G bewegt haben, und es wird jetzt ein andrer Punkt desselben Kammes an F liegen. Man sucht die Lage dieses Punktes in Rücksicht auf G durch Abscissen BF $=$ x, welche auf dem verlängerten Radius BG von B aus genommen werden, und rechtwinkliche Ordinaten EF $=$ y zu bestimmen.

Es ist AD $= \frac{(R + r) \text{Sin}\,\beta}{\text{Sin}\,(\alpha + \beta)}$; also DF $= \frac{(R + r)\,\text{Sin}\,\beta - r\,\text{Sin}\,(\alpha + \beta)}{\text{Sin}\,(\alpha + \beta)}$ und EF $= y = (R + r)\,\text{Sin}\,\beta - r\,\text{Sin}\,(\alpha + \beta)$. Ferner ist BD $= \frac{(R + r)\,\text{Sin}\,\alpha}{\text{Sin}\,(\alpha + \beta)}$ und DE $=$ DF . Cos $(\alpha + \beta) = \text{Cos}\,(\alpha + \beta) \left(\frac{(R + r)\,\text{Sin}\,\beta - r\,\text{Sin}\,(\alpha + \beta)}{\text{Sin}\,(\alpha + \beta)}\right)$; folglich BE $= x =$

$$= \frac{(R + r)\,[\text{Sin}\,\alpha + \text{Sin}\,\beta\,.\,\text{Cos}(\alpha + \beta)] - r\,\text{Sin}\,(\alpha + \beta)\,.\,\text{Cos}(\alpha + \beta)}{\text{Sin}\,(\alpha + \beta)}$$

$$= (R + r)\,\frac{(\text{Sin}\,\alpha + \text{Sin}\,\beta\,.\,\text{Cos}\,\alpha\,.\,\text{Cos}\,\beta - \text{Sin}\,\alpha\,.\,\text{Sin}^2\beta)}{\text{Sin}\,\alpha\,.\,\text{Cos}\,\beta + \text{Sin}\,\beta\,.\,\text{Cos}\,\alpha}$$

$$- r\,\text{Cos}\,(\alpha + \beta)$$

$$= (R + r)\,\frac{(\text{Sin}\,\beta\,.\,\text{Cos}\,\alpha\,.\,\text{Cos}\,\beta + \text{Sin}\,\alpha\,.\,\text{Cos}^2\beta)}{\text{Sin}\,\alpha\,.\,\text{Cos}\,\beta + \text{Sin}\,\beta\,.\,\text{Cos}\,\alpha}$$

$$- r\,\text{Cos}\,(\alpha + \beta) = (R + r)\,\text{Cos}\,\beta - r\,\text{Cos}\,(\alpha + \beta)$$

Endlich ist $r : R = \beta : \alpha$, und daher $r : (R + r) = \beta : (\alpha + \beta)$; folglich ist der Winkel $(\alpha + \beta) = \frac{(R + r)}{r}\,\beta$. Es ist daher $y = r \left[\frac{(R + r)}{r}\,\text{Sin}\,\beta - \text{Sin}\left(\frac{(R + r)}{r}\,\beta\right)\right]$; und eben so $x = r\left(\frac{(R + r)}{r}\,\text{Cos}\,\beta - \text{Cos}\left(\frac{(R + r)}{r}\,\beta\right)\right)$; oder wenn man $\frac{R + r}{r} = n$ setzt; so ist $y = r\,(n\,\text{Sin}\,\beta - \text{Sin}\,n\beta)$ und $x = r\,(n\,\text{Cos}\,\beta - \text{Cos}\,n\beta)$.

2. Diese Formeln sind so einfach, daß man für jedes angenommne β die Koordinaten x, y mittelst der gewöhnlichen Sinustafeln sehr leicht wird berechnen können. Ist n eine ganze Zahl, so wird es auch leicht, x und y durch Zeichnung zu finden. Man nehme auf einem nicht zu sehr verjüngten Maaßstabe r, und beschreibe damit Fig. 2 aus C den Kreis AQ. Ferner ziehe man den Durchmesser AQ, und verlängre ihn willkührlich gegen H. Nimmt man nun den Winkel ACB für β an, trägt die Sehne AB aus A nach R, zieht die Linie BR, trägt ferner AB aus A nmal bis D, die Sehne AD aus A in T, zieht DT, trägt darauf aus D die halbe Sehne BG nmal bis E, und ferner aus C die Linie CG nmal auf den verlängerten Diameter bis H; so ist HF = x, EF = y für den Winkel ACB, und nach demselben verjüngten Maaßstabe, nach welchem vorhin r angenommen wurde. Es ist nämlich der Winkel ACD = n × ACB, folglich CF = r Cos nβ und DF = r Sin nβ; ferner CG = r Cos β, demnach CH = rn Cos β, und BG = r Sin β, folglich DE = rn Sin β; daher HF = CH — CF = r (n Cos β — Cos nβ) = x, und EF = DE — DF = r (n Sin β — Sin nβ) = y. Ist entweder n eine große Zahl, oder β ziemlich groß, so könnte nβ leicht ein stumpfer Winkel werden, dessen Cosinus verneint ist: es ist also alsdann der Cosinus des Nebenwinkels von nβ zu dem nfachen Cosinus von β zu addiren. Hätte man β = ACI genommen, und wie vorhin AI aus A in S getragen, AI aus A nmal bis K gesetzt, AN = AK gemacht, IS und KN gezogen,

aus K in M den Sinus IL nmal und C in P den Cosinus CL ebenfalls n mal getragen; so wäre MN = Y und NP die zubehörige Abscisse x.

3. Wäre n keine ganze Zahl, so lassen sich im Allgemeinen x und y nicht durch eine rein geometrische Verzeichnung blos durch Zirkel und Lineal finden. Wollte man demohngeachtet lieber zeichnen als rechnen: so könnte man etwan folgendermaßen verfahren. Man beschreibe wieder mit r den Kreis KFG, ziehe den Durchmesser AK, und verlängre ihn gegen L. Ist nun β = ACB und AD = AB, so ist BE = r Sin β, und CE = r Cos β. Trägt man nun mittelst eines Transporteurs oder mit Hülfe der Sehnentafeln den Winkel ACF = n × ACB auf, macht AG = AF, und zieht GF, so ist FH = Sin nβ, und CH = Cos nβ. Mißt man mittelst des verjüngten Maaßstabes BE und CE; so kann man sich leicht das nfache davon berechnen, und n × BE auf FG aus F in I, desgleichen n × CE auf den verlängerten Durchmesser aus C in L auftragen: wo denn HL = x, HI = y seyn wird.

4. Ist R sehr groß, so wird die Verzeichnung sehr beschwerlich werden, weil alsdann x sehr lang wird, und man doch keinen sehr kleinen Maaßstab nehmen kann, um die anfangs sehr kleinen Ordinaten mit hinlänglicher Deutlichkeit zu verzeichnen. Da könnte man nun den Anfang der Abscissen nicht in den Mittelpunkt des Stirnrades, sondern in den Umfang des Theilungskreises desselben Rades legen, und nicht BE, sondern EG in Fig. 1. für die Abscisse nehmen. Um diese Abscisse durch Zeichnung

zu finden, könnte man jedesmal, n sei ganz oder gebrochen, r Cos β mit dem verjüngten Maaßstabe messen, das n fache davon berechnen, R davon abziehen, und nur den Ueberrest aus C auf den verlängerten Durchmesser tragen, wo sich dann jenseits H die gesuchte Abscisse abschneiden würde.

5. In allen gut angeordneten Mühlenwerken ist n in der Regel ein Bruch; weil die Anzahl der Stöcke niemals in der Anzahl der Kämme aufgehen darf, und es sogar am Besten ist, wenn beide Zahlen gar keinen gemeinschaftlichen Divisor haben.

Man läßt in Mühlen selten mehr als drei Kämme zugleich eingreifen; mithin ist β gewöhnlich nicht größer als $\frac{3}{2p}$ des Kreises, wenn p die Anzahl der Kämme bedeutet, das ist z. B. in einem Stirnrade von 64 Kämmen $8\frac{7}{16}$ Grade. x — R wird auch selten länger als $1\frac{1}{2}$ Zoll. Für $\beta = 0$ ist $x = R$ und $y = 0$; fände man nun noch die Werthe beider Coordinaten für das halbe und ganze Maximum von β, so wären drei Punkte in dem Umrisse des halben Kammes, so weit er nämlich zwischen die Stöcke eingreift, bestimmt. Ein Kreisbogen durch diese drei Punkte gelegt, könnte innerhalb einer so geringen Länge nicht bedeutend von einem Bogen der krummen Linie abweichen, durch welche eigentlich der Umriß des Kammes bestimmt wird. So könnte man mit hinlänglicher Genauigkeit die Gestalt der Stirnradskämme finden, ohne eben sehr mühsame Rechnungen anzustellen. Einige Beispiele werden das Verfahren erläutern, und zugleich zu einigen Betrachtungen Anlaß geben.

6. Es liege ein Stirnrad von 72 Kämmen an einem Trillinge von 35 Stöcken; die Theilung sei $4\frac{1}{2}$ Zoll: so ist R in Zollen $= \frac{4\frac{1}{2}.72}{2\pi}$; $r = \frac{4\frac{1}{2}.35}{2\pi}$; folglich $n = \frac{R + r}{r} = \frac{107}{35}$. Das Maximum für β ist hier $\frac{3}{2.72} = \frac{1}{48}$ des Kreises, oder $7\frac{1}{2}$ Grad. Nun ist aus den Trig. Tafeln

$$\frac{107}{35} \text{ Sin } 7\tfrac{1}{2}^\circ = 0,\ 399\ 037$$
$$\text{Sin } \tfrac{107}{35}.7\tfrac{1}{2}^\circ = 0,\ 389\ 583$$
$$\text{Diff.} = 0,\ 009\ 454$$
$$y = r.\text{Diff.} = 0'',236\ 983$$
$$\frac{107}{35} \text{ Cos. } 7\tfrac{1}{2}^\circ = 3,\ 030\ 989$$
$$\text{Cos. } \tfrac{107}{35}.7\tfrac{1}{2}^\circ = 0,\ 920\ 991$$
$$\text{Diff.} = 2,\ 109\ 998$$
$$x = r.\text{Diff.} = 52'',\ 891\ 12$$
$$R = 51'',\ 566\ 20$$
folglich $x - R = 1'',324\ 92$

Das halbe Maximum ist $3\frac{3}{4}°$: dafür hat man:

$\frac{107}{35}$ Sin $3\frac{3}{4}°$	=	0, 199 947
Sin $\frac{107}{35} . 3\frac{3}{4}$	=	0, 198 757
Diff.	=	0, 001 190
y = r . Diff.	=	0″, 029 825
$\frac{107}{35}$ Cos. $3\frac{3}{4}°$	=	3, 050 597
Cos $\frac{107}{35} . 3\frac{3}{4}$	=	0, 980 049
Diff.	=	2, 070 548
x = r . Diff.	=	51″, 902 22
R	=	51″, 566 20
x — R	=	0″, 336 02

7. Wäre das vorige Stirnrad an ein Getriebe von 11 Stöcken gelegt, so würde $n = \frac{72 + 11}{11}$ $= \frac{83}{11}$; da hätte man nun für $\beta = 7\frac{1}{2}°$

$\frac{83}{11}$ Sin $7\frac{1}{2}°$	=	0, 984 880
Sin $\frac{83}{11} . 7\frac{1}{2}$	=	0, 834 761
Diff.	=	0, 150 119
y = r . Diff.	=	1″, 182 663
$\frac{83}{11}$ Cos . $7\frac{1}{2}°$	=	7, 480 902
Cos $\frac{83}{11} . 7\frac{1}{2}°$	=	0, 550 613
Diff.	=	6, 930 289
x = r . Diff.	=	54″, 598 00
R	=	51″, 566 20
x — R	=	3″, 031 80

Ferner für $\beta = 3\frac{3}{4}°$

$\frac{83}{11}$ Sin $3\frac{3}{4}°$	=	0, 493 496
Sin $\frac{83}{11} \cdot 3\frac{3}{4}°$	=	0, 473 949
Diff.	=	0, 019 547
y = r Diff.	=	0, 153 999
$\frac{83}{11}$ Cos. $3\frac{3}{4}°$	=	7, 529 299
Cos $\frac{83}{11} \cdot 3\frac{3}{4}°$	=	0, 880 553
Diff.	=	6, 648 746
x = r. Diff.	=	52″, 379 94
R	=	51″, 566 20
x — R	=	0″, 813 74

8. Es sei endlich ein Stirnrad von 24 Kämmen an den vorigen Trilling von 35 Stöcken gelegt; so ist $n = \frac{59}{35}$ und das Maximum für $\beta = 22\frac{1}{2}°$. Für dieses hat man

$\frac{59}{35}$ Sin $22\frac{1}{2}°$	=	0, 645 095
Sin $\frac{59}{35} \cdot 22\frac{1}{2}$	=	0, 614 679
Diff.	=	0, 030 416
y = r. Diff.	=	0″, 762 442
$\frac{59}{35}$ Cos. $22\frac{1}{2}°$	=	1, 557 397
Cos $\frac{59}{35} \cdot 22\frac{1}{2}°$	=	0, 788 778
Diff.	=	0, 768 619
x = r. Diff.	=	19″, 266 89
R	=	17″, 188 73
x — R	=	2″, 078 16

Für $\beta = 11\frac{1}{4}°$

$\frac{50}{35}$ Sin $11\frac{1}{4}° = 0,328\,867$

Sin $\frac{50}{35} . 11\frac{1}{4}° = 0,324\,979$

Diff. $= 0,003\,888$

$y = r .$ Diff. $= 0'',097\,455$

$\frac{50}{35}$ Cos. $11\frac{1}{4}° = 1,653\,324$

Cos $\frac{50}{35} . 11\frac{1}{4}° = 0,945\,721$

Diff. $= 0,707\,603$

$x = r .$ Diff. $= 17'',737\,40$

$R = 17'',188\,73$

$x - R = 0'',548\,67$

9. Wollte man nun nach solchen Berechnungen den Kamm nach seiner natürlichen Größe verzeichnen; so könnte man etwan folgendermaßen verfahren. Es sei AB Fig. 4 die Mittellinie des Kammes; so kommt es zuerst darauf an, die Abscissenlinie in ihrer richtigen Lage dagegen zu verzeichnen. Ist wie in den vorigen Beispielen die Theilung $4\frac{1}{2}$ Zoll, so kann man für die halbe Dicke des Kammes, im ersten Falle etwan $0''$, 96 oder $\frac{3}{14}$ der Theilung, im zweiten Falle etwan $0''$, 90, oder $\frac{1}{5}$ der Theilung, im dritten Falle etwan $1''$, 12 oder $\frac{1}{4}$ der Theilung annehmen. Ist nämlich die Anzahl der Stöcke und Kämme beinahe gleich groß, so ist kein Grund vorhanden, jene stärker als diese zu nehmen: sind dagegen der Stöcke viel weniger, als der Kämme, so nutzen sich jene eher ab, als diese, und es ist daher nöthig sie etwas stärker zu nehmen. Man könnte verlangen, daß auch hier ein Gesetz zum Grunde

gelegt würde) z. B. daß die Dicken der Stöcke und Kämme sich umgekehrt verhielten, wie die Cubikwurzeln aus ihrer Anzahl: aber dann würden für große Stirnräder und kleine Getriebe die Kämme zu dünn ausfallen, und nicht den Druck der auf sie einwirkenden Kraft aushalten. Es bleibt daher nichts übrig, als bei den empyrischen Sätzen stehen zu bleiben, daß man bei ohngefähr gleicher Anzahl Stöcke und Kämme gleich dick nimmt; daß man $\frac{3}{7}$ der Theilung dem Kamme giebt, wenn der Kämme zwei bis dreimal mehr sind, als der Stökke; und daß man $\frac{2}{5}$ der Theilung auf den Kamm rechnet, wenn die Anzahl der Kämme vier und mehrmals größer ist, als die Anzahl der Stöcke.

Die halbe Breite des Kammes nach diesen Grundsätzen bestimmt, ist eigentlich ein Bogen des Theilungskreises, der indessen ein so kleines Stück desselben ist, daß er nicht merklich von seinem Sinus verschieden sein wird. Man kann daher auf A einen Perpendikel aufsetzen, und darauf die vorhin erwähnte halbe Breite des Kammes AC tragen. In den mehresten Bestecken hat man Maaßstäbe, auf welchen der zwölftheilige rheinländische Zoll in hundert Theile getheilt ist: diese sind hier sehr bequem.

Eben so wird die Länge der größten Abscisse von der Länge der Mittellinie des Kammes nicht merklich verschieden sein; man kann daher AB dem Maximum von $x - R$ gleich machen, und auf B den Perpendikel BD setzen. Da $R : x = AC : AD$; so ist $AD = \frac{AC \times x}{R}$. Hierdurch sind die

Punkte C, D, und mithin die Lage der Absciſſen-linie DH beſtimmt. Auf dieſe trage man aus C in E und D die beiden berechneten Werthe für x — R, und ſetze rechtwinklicht auf E und D die zubehörigen Ordinaten EF und DG; ſo ſind die drei Punkte C, F, G beſtimmt, durch welche man auf die bekannte Art den Kreisbogen CFG verzeichnen kann. Rückwärts gegen H braucht der Kamm eigentlich nicht länger zu ſein, als der Radius des zubehörigen Stocks; damit indeſſen bei Reparaturen etwas Raum da ſei, um die Räder ſeitwärts keilen zu können, macht man CH gemeinhin zwei Zoll. Man könnte ſich aber in den mehreſten Fällen mit $1\frac{1}{2}$ Zoll begnügen laſſen, da der Kamm nur deſto leichter abbricht, je länger er hervorſteht. Am Vorderende verſchneidet man den Kamm am beſten rechtwinklicht. Demnach wäre hier KIHCG der halbe Kamm. Man kann hiernach ein Schablon von Blech ausſchneiden, auf allen Kämmen, nachdem die Theilung aufgetragen worden iſt, die Mittellinie verzeichnen, an dieſe die Seite KI des Schablons ſo anlegen, daß A auf den Theilſtich trifft, und danach den Umriß des halben Kammes HCGK aufreißen. Es iſt wahr, daß die Verfertigung ſolcher Schablone immer mühſam iſt: indeſſen können ſie ein vor allemal bei der erſten Anlage des Werkes angefertigt werden, und nachher als Inventarienſtücke dabei bleiben, um bei jeder neuen Verſchirrung zu dienen.

10. Der hier in Fig. 4 verzeichnete Kamm iſt nach dem erſten vorhin berechneten Beiſpiele aufgetragen, und gehört alſo zu einem Stirnrade von

72 Kämmen, an welchem ein Trilling von 35 Stökken liegt. Wollte man auf ähnliche Art den Kamm für das zweite vorhin berechnete Beispiel verzeichnen, so würde man finden, daß der Bogen CFG, der sich dort viel schneller krümmt, die Mittellinie schneidet; dadurch aber wird der Kamm am Vorderende ganz spiz, und der Gefahr ausgesezt abzusplittern; überdieß wird er unmäßig lang, und daher um so mehr schwach. Es ist demnach räthlich, in diesem Falle für das Maximum von β einen kleinern Winkel als $7\frac{1}{2}°$ anzunehmen. Ueberhaupt ist darauf zu sehen, daß GK nie kleiner als $\frac{1}{2}$AC werde, weil sonst der Kamm zu zerbrechlich wird.

11. Alle Verzeichnungsarten der Müller hängen blos von der Größe der Theilung und der Länge des Radius des Stirnrades ab; sie geben daher für einerlei Stirnrad einerlei Gestalt der Kämme, ohne alle Rücksicht auf die Größe des Trillings, der daran liegt. Da gleich lange Kreisbogen um desto krümmer sind, je kleiner der Radius ist, womit sie beschrieben werden: so ist schon an sich klar, daß gleich lange Kämme um desto schneller auswinden müssen, je kleiner der Radius des Trillings ist, in welchen sie eingreifen; damit dieß aber geschehen könne, müssen die Kämme desto stärker gekrümmt sein, je kleiner der Radius des Trillings gegen den Radius des Stirnrades ist. Man kann dies auch so übersehen. Der Kamm krümmt sich um desto schneller, je schneller y im Verhältnisse gegen x wächst. Nun ist:

$y = r\ (n \operatorname{Sin} \beta - \operatorname{Sin} n\beta)$ und daher

$dy = r\ (n \operatorname{Cos} \beta . d\beta - n \operatorname{Cos} n\beta . d\beta)$

$= rn.d\beta\ (\mathrm{Cos}\ \beta - \mathrm{Cos}\ n\beta) = rn.d\beta.2\ \mathrm{Sin}\ \frac{1}{2}(n\beta + \beta)\ \mathrm{Sin}\ \frac{1}{2}(n\beta - \beta)$.

Und, eben so $x = r\ (n\ \mathrm{Cos}\ \beta - \mathrm{Cos}\ n\beta)$ und daher $dx = r\ (n\ \mathrm{Sin}\ \beta.d\beta - n\ \mathrm{Sin}\ n\beta.d\beta) = rn.d\beta\ (\mathrm{Sin}\ \beta - \mathrm{Sin}\ n\beta) = -rn.d\beta\ (\mathrm{Sin}\ n\beta - \mathrm{Sin}\ \beta) = -rn.d\beta.2\ \mathrm{Cos}\ \frac{1}{2}(n\beta + \beta)\ \mathrm{Sin}\ \frac{1}{2}(n\beta - \beta)$.

Daher ist $dy : dx = \mathrm{Sin}\ \frac{1}{2}(n\beta + \beta) : \mathrm{Cos}\ \frac{1}{2}(n\beta + \beta) = \mathrm{tang}\left(\frac{(n+1)}{2}\beta\right) : 1$; nämlich ohne Rücksicht auf die Verschiedenheit der Zeichen, welche sich nur auf die Lage der Ordinaten gegen die Abscissenlinie bezieht. Es wachsen daher die Ordinaten in eben dem Verhältnisse gegen die Abscissen, welches die Tangente des Winkels $\left(\frac{n+1}{2}\right)\beta$ zum Radius hat. Für einerlei β ist aber diese Tangente um desto größer, je größer $\frac{n+1}{2}$, das ist je größer n ist. n war aber $\frac{R+r}{r} = \frac{R}{r} + 1$, welches um desto größer wird, je größer R gegen r ist. Es wachsen daher für einerlei Umdrehungswinkel β die Ordinaten um desto mehr im Verhältnisse gegen die Abscissen, je größer der Durchmesser des Stirnrades gegen den Durchmesser des Trillings ist.

Wird also ein andrer Trilling an das Stirnrad gelegt, so wird eine andre Gestalt der Kämme nöthig. Es können daher auch nicht zwei Trillinge von verschiednem Durchmesser an einerlei Stirnrad

gelegt werden. Indessen geschieht dieß in Mühlen doch häufig genug; und da die Gestalt der Kämme nicht merklich verändert wird, wenn n um einen kleinen Bruch wächst oder abnimmt; so kann man wohl verstatten, daß Trillinge von wenig verschiednem Durchmesser in einerlei Stirnrad greifen. Doch bleibt es immer rathsam, vorher zu untersuchen, wie weit diese Verschiedenheit gehen könne, ohne die Gestalt des Kammes allzusehr zu ändern.

12. Die gewöhnlichste Verzeichnungsart der Müller giebt die Kämme desto krümmer und abgespitzter, je geringer ihre Anzahl ist. Kleine Stirnräder, welche in große Trillinge greifen, schlottern daher, weil sie krümmer sind, als es das bloße Bedürfniß des richtigen Auswindens erfordert; und große Stirnräder, welche in kleine Getriebe greifen, klemmen aus dem entgegengesetzten Grunde. Man hilft sich im letztern Falle dadurch, daß man etwas Spielraum zwischen Stock und Kamm läßt; auch werden gemeinhin die Kämme an den Ecken stark verbrochen, ja zuweilen am Vorderende ganz abgerundet. Das Hainbüchenholz, womit unsre Mühlenräder gemeinhin verschirrt werden, reibt sich auch bald soviel ab, daß die Kämme bequem auswinden. Hat man Stöcke von einer härteren Materie, so wird man freilich die Gestalt der Kämme sorgfältiger bestimmen müssen.

13. In der That ist es beinahe unbegreiflich, wie unsre Mühlen bei allen den großen Fehlern, welche im Verschirren und Zusammensetzen des Räderwerkes begangen werden, noch so leidlich gehen können, als es wirklich der Fall ist: denn nicht al-

lein ist es ein bloßer Zufall, wenn die Kämme eine Gestalt erhalten, welche sich der richtigen Form bis auf einen unbedeutenden Unterschied nähert; sondern es ist auch überdieß, zumal in alten oft verschirrten Rädern, sehr selten die Theilung richtig aufgetragen, und noch seltner sind die Räder so in einander gekeilt, daß die Theilungskreise sich eben berühren. Das erstere wird so lange geschehen, als man überhaupt die Stirnräder nicht sorgfältiger verbindet, und auf den Stößen mit eisernen Schrauben verwahrt. Das letztere ist ein sehr gewöhnlicher und schwer zu vermeidender Fehler. So lange indeß diesen beiden Mängeln nicht abgeholfen wird, ist es ganz vergebens unsern Müllern Schablone von richtig verzeichneten Kämmen in die Hände zu geben, weil die besten Kämme doch nicht richtig aus und einwinden können, so lange die Theilungen nicht genau auf einander passen.

14. Das Holz ist seiner Natur nach ein Material, welches in den mannigfaltigen Abänderungen der Witterung seine Form sehr beträchtlich verändert. Planken, welche drei Jahre lang auf einem luftigen Boden verwahrt worden sind, trocknen dennoch zuweilen noch nach, und verursachen beträchtliche Spalten. Das Holz in großer Hitze schnell zu trocknen, ist noch weniger räthlich. Es reißt leicht auf, verliert auch wirklich beträchtlich an seiner Festigkeit. Hat man Holz auch endlich so weit, daß man gegen alles Eintrocknen gesichert ist; so bleibt es dennoch dem Einflusse der Feuchtigkeit ausgesetzt. Es schwillt in dieser auf, und alle Nägel und Schrauben verhindern nicht ganz, daß es

sich merklich ausdehne: folgt dann starke Trockenheit auf feuchte Luft, so trocknet es wieder zusammen, und die Risse sind unausbleiblich da. Diese Abänderungen verderben zuweilen unsre Meublen, ohngeachtet sie in trocknen und geheizten Zimmern stehen: was soll aus den Rädern werden, welche in den Mühlen dem Luftzuge und der Feuchtigkeit so sehr ausgesetzt sind? Demohngeachtet bleibt Holz noch immer das einzige Material, woraus Stirn- und Kammräder im Großen zusammengesetzt werden können. Das Holz ist nicht allein wohlfeiler, als jedes Surrogat, das wir an die Stelle desselben setzen könnten; sondern das Bedürfniß der Konstruktion erfordert häufig auch, daß die Räder einen beträchtlichen Durchmesser haben, bei welchem sie aus gegoßnem Eisen zu schwer ausfallen würden: denn wollte man auch die Vortheile aufgeben, welche die Schwungkraft schnell umgehender Räder von großen Durchmessern gewährt; so könnte man doch oft nicht vermeiden, den Wellen gewisse Entfernungen zu geben, um den gehörigen Raum für die verschiednen unmittelbar arbeitenden Theile der Maschine und für die Bequemlichkeit der dabei angestellten Arbeiter zu erhalten. So können z. B. die Mühleisen zweier fünffüßigen Mühlsteine nicht füglich näher als neun Fuß an einander liegen; werden sie nun von einem Stirnrade, welches in beide Getriebe greift, in Bewegung gesetzt; so muß dieses $7\frac{1}{2}$ — 8 Fuß im Durchmesser haben. Ein eisernes Rad von diesem Durchmesser ist für die mehresten Mühlen zu kostbar.

15. Bei dem ernstlichen Bestreben, grade die

Maschinen,

Maschinen, welche im Großen arbeiten, vorzüglich zu vervollkommnen, dünkt es mir doch nothwendig, nie oder doch wenigstens jetzt noch nicht die vollendete Ausarbeitung von ihnen zu erwarten, die man von kleinern Maschinen zu fordern berechtigt ist. Es giebt einen Grad von Vollkommenheit, der nicht die Zinsen der Kosten einbringt, welche man darauf verwenden muß: und man ist unkonsequent, wenn man auf kleine Verbesserungen einen hohen Werth legt, während noch grobe Mängel die Vortheile vernichten, welche man davon erwartet. Ehe man in unsere Mühlen richtiger gestaltete Stirnradskämme einzuführen versucht, dünkt es mir nothwendig, erst die Fehler zu vermindern, welche aus der Wandelbarkeit des Holzes und der Sorglosigkeit der Arbeiter entstehen. Schon die Gebäude müßten so eingerichtet sein, daß das Räderwerk mehr gegen den Einfluß der Witterung geschützt wäre. Man setzt aus Sparsamkeit in die Fensteröffnungen häufig keine Glasfenster ein, sondern verwahrt sie mit bloßen Laden, die man, um Luft und Licht zu erhalten, selbst bei Schneegestöber und Schlagregen zu öffnen genöthigt ist. Das Räderwerk leidet offenbar hierdurch, und die Ausgabe für einige Glasfenster ist keinesweges so groß, daß man sie scheuen sollte. Daß ein Mühlengebäude vollkommen dicht in Wänden und Dach sein sollte, wird niemand bezweifeln: dennoch findet man oft beträchtliche Werke in Schoppen, welche sorglos genug mit Dielen verkleidet sind, und ein unverschaltes Pfannendach oder ein einfaches Dach von Bieberschwänzen haben. In einem solchen Gebäude ist das Rä-

derwerk sehr wenig gegen den Einfluß der Witterung geschützt. Das Holz, welches zu den Rädern genommen wird, sollte auch sorgfältiger ausgewählt werden. Gemeinhin begnügt man sich Planken für trocken zu halten, welche ein Jahr lang in einem übelverwahrten Schoppen gelegen haben. Mir dünkt, man sollte es sich zum Gesetze machen, kein andres Holz zu verarbeiten, als solches, welches aus gesunden und reifen Stämmen geschnitten wäre, und wenigstens drei Jahre lang auf einem hellen, geräumigen und vollkommen trocknen Boden gehörig auf Unterspäne gestapelt gelegen hätte. Bei jeder Mühle sollte ein schicklicher Raum hierzu unter dem Dache abgeschlagen werden. Für sehr große Mühlenanlagen sollten eigne Nutzholzmagazine eingerichtet werden. Die Erfahrung lehrt, daß alles Holz ungleich fester, dauerhafter und besonders unempfänglicher gegen die Einflüsse der Feuchtigkeit wird, wenn man es durch und durch mit Oel eintränkt. Es gehört dazu allerdings viel Zeit und Oel. Demohngeachtet zweifle ich nicht, daß die Kosten davon sich wohl verzinsen würden. Man streicht bei Häuserbauten Fenster, Thüren und hölzerne Simse mit Oelfarbe an, um sie gegen den Einfluß der Feuchtigkeit zu verwahren. Es ist mir nicht bekannt, daß man in irgend einer Mühle die Reifen und Arme der Räder mit Oelfarbe angestrichen hätte: demohngeachtet wäre dieß ein leichtes Verwahrungsmittel, das man anwenden könnte, wenn man zu sehr eilen müßte, als daß man zu dem freilich noch weit vorzüglichern, aber äußerst langweiligen Einölen, sich Zeit nehmen könnte. Erst wenn man

alle diese Vorsichtsmaaßregeln anwendet, werden unsre Räder aufhören, wahre Hygrometer zu sein, und erst dann wird man bei ihnen auf eine bleibende Form rechnen können.

16. Es ist unerläßlich, daß jedes Wellenlager beweglich sei: aber der Müller muß diese Einrichtung nicht dazu misbrauchen, um die Räder willkührlich aus- und in- einander zu keilen. Es sollte vielmehr niemals eine Mühle eher angelassen werden, ehe man nicht vollkommen überzeugt wäre, daß die Theilungskreise einander genau berührten. Das ist äußerst schwürig genau zu erkennen; indessen ließen sich wohl Vorrichtungen denken, die es erleichterten. Die einfachste wären Merkmale an den Kämmen und Stöcken, die genau auf einander passen müßten; nur entsteht dabei die Schwürigkeit, daß die Schmiere diese Merkmale leicht unsichtbar machen könnte. Sichrer wären vielleicht genau abgepaßte Maaße, die man zwischen den Reif des Stirnrades und einen Stock einschieben könnte, um daran zu beurtheilen, ob beide in dem gehörigen Abstande von einander wären. Daß man die gewöhnliche Vorrichtung der Pansterwellen aufgeben, und eine andre wählen müßte, wobei durch das Aufziehen und Niederlassen die Theilungskreise nicht außer Berührung kämen, ist an sich klar.

Erst dann, wenn man sicher ist, daß die Theilungen unveränderlich genau auf einander passen, wird man nicht ohne Nutzen von Verzeichnungen Gebrauch machen, welche die Gestalt der Kämme richtiger geben, als die gewöhnlichen Construktionen der Müller, und dann wird es Zeit sein, von den

oben erwähnten Schablonen Gebrauch zu machen. Man kann von dem Müller nicht fordern, daß er sich solche Schablone selbst verfertige: aber der Mühlenbaumeister sollte sie bei jeder neuen Anlage verfertigen, und dem Müller als ein Inventarienstück zurücklassen.

II.

Untersuchungen über die Gestalt der Trillingsstöcke, in Rücksicht auf das Auswinden der Stirnradskämme.

17. In Fig. 1. sei F der äußerste Punkt eines Kammes. Das Stirnrad bewege sich weiter um den Bogen MN; so wird indeß F nach I gekommen sein. In eben derselben Zeit wird sich der Punkt F im Theilungskreise des Trillings um den eben so langen Bogen FH weiter fortbewegt haben, und in H angekommen sein. Man sucht die Lage von I in Rücksicht auf H durch rechtwinkliche Coordinaten zu bestimmen; der verlängerte Radius AH soll die Abscissenlinie und der Mittelpunkt A der Nullpunkt in ihr sein.

Man setze den Winkel CAH = δ, den Winkel CBM = ε, BI = BF = ϱ; alle übrigen Buchstaben mögen dieselbe Bedeutung behalten, welche sie in der vorigen Untersuchung hatten. So ist BK

$= \frac{(R+r)\,Sin\,\delta}{Sin\,(\varepsilon+\delta)}$; $IK = \frac{(R+r)\,Sin\,\delta - \varrho\,Sin\,(\varepsilon+\delta)}{Sin\,(\varepsilon+\delta)}$; $IL = z = (R+r)\,Sin\,\delta - \varrho\,Sin\,(\varepsilon+\delta)$; $KL = IK\,Cos\,(\varepsilon+\delta) = \frac{(R+r)\,Sin\,\delta\,Cos\,(\varepsilon+\delta)}{Sin\,(\varepsilon+\delta)} - \varrho\,Cos\,(\varepsilon+\delta)$; $AK = \frac{(R+r)\,Sin\,\varepsilon}{Sin\,(\varepsilon+\delta)}$; $AL = AK + KL = \frac{(R+r)\,[Sin\,\varepsilon + Sin\,\delta\,Cos\,(\varepsilon+\delta)]}{Sin\,(\varepsilon+\delta)} - \varrho\,Cos\,(\varepsilon+\delta)$ und $\frac{Sin\,\varepsilon + Sin\,\delta\,Cos\,(\varepsilon+\delta)}{Sin\,(\varepsilon+\delta)}$

$$= \frac{Sin\,\varepsilon + Sin\,\delta\,Cos\,\varepsilon\,Cos\,\delta - Sin^2\,\delta\,Sin\,\varepsilon}{Sin\,(\varepsilon+\delta)}$$

$$= \frac{Sin\,\delta\,Cos\,\varepsilon\,Cos\,\delta + Sin\,\varepsilon\,Cos^2\,\delta}{Sin\,\delta\,Cos\,\varepsilon + Sin\,\varepsilon\,Cos\,\delta} = Cos\,\delta;$$

daher denn endlich $AL = u = (R+r)\,Cos\,\delta - \varrho\,Cos\,(\varepsilon+\delta)$

Es kommt nun darauf an, eine Vergleichung zwischen den Winkeln ε und δ zu finden. Ist der Winkel $MBN = \gamma$; so ist $FAH = \frac{R}{r}\,\gamma$; folglich $CAH = \delta = \frac{R}{r}\,\gamma + \alpha = \frac{R}{r}(\beta+\gamma) = (n-1)(\beta+\gamma)$. Es sei ferner der Winkel $GBN = \omega$; $CBN = \beta - \omega$; folglich $CBM = \beta + \gamma - \omega$.

Es ist daher $z = (R+r)\,Sin\,(n-1)(\beta+\gamma) - \varrho\,Sin\,[n\,(\beta+\gamma) - \omega]$ und $u = (R+r)\,Cos\,(n-1)(\beta+\gamma) - \varrho\,Cos\,[n\,(\beta+\gamma) - \omega]$.

Ferner ist $Sin\,\omega = \frac{y}{\varrho} = \frac{r\,(n\,Sin\,\beta - Sin\,n\,\beta)}{\varrho}$,

und $\text{Cos}\, \omega = \frac{x}{\varrho} = \frac{r\,(n\, \text{Cos}\, \beta - \text{Cos}\, n\beta)}{\varrho}$. Daher ist $\varrho\, \text{Sin}\, [n\,(\beta + \gamma) - \omega] = r\, [\text{Sin}\, n\,(\beta + \gamma)\, (n\, \text{Cos}\, \beta - \text{Cos}\, n\beta) - \text{Cos}\, n\,(\beta + \gamma)\, (n\, \text{Sin}\, \beta - \text{Sin}\, n\beta)] = r\, [(\text{Sin}\, n\beta\, \text{Cos}\, n\gamma + \text{Sin}\, n\gamma\, \text{Cos}\, n\beta)\, (n\, \text{Cos}\, \beta - \text{Cos}\, n\beta) - (\text{Cos}\, n\beta\, \text{Cos}\, n\gamma - \text{Sin}\, n\gamma\, \text{Sin}\, n\beta)\, (n\, \text{Sin}\, \beta - \text{Sin}\, n\beta)] = r\, (n\, \text{Cos}\, \beta\, \text{Sin}\, n\beta\, \text{Cos}\, n\gamma - \text{Cos}\, n\beta\, \text{Sin}\, n\beta\, \text{Cos}\, n\gamma + n\, \text{Cos}\, \beta\, \text{Sin}\, n\gamma\, \text{Cos}\, n\beta - \text{Cos}^2\, n\beta\, \text{Sin}\, n\gamma - n\, \text{Sin}\, \beta\, \text{Cos}\, n\beta\, \text{Cos}\, n\gamma + \text{Sin}\, n\beta\, \text{Cos}\, n\beta\, \text{Cos}\, n\gamma + n\, \text{Sin}\, \beta\, \text{Sin}\, n\beta\, \text{Sin}\, n\gamma - \text{Sin}^2\, n\beta\, \text{Sin}\, n\gamma) = r\, [n\, \text{Sin}\, [(n - 1)\, (\beta + \gamma) + \gamma] - \text{Sin}\, n\gamma]$: und daher $z = (R + r)\, \text{Sin}\, (n - 1)\, (\beta + \gamma) - r\, [n\, \text{Sin}\, [(n - 1)\, (\beta + \gamma) + \gamma] - \text{Sin}\, n\gamma] = rn\, \text{Sin}\, \delta - rn\, \text{Sin}\, (\delta + \gamma) + r\, \text{Sin}\, n\gamma = r\, [\text{Sin}\, n\gamma - n\, [\text{Sin}\, (\delta + \gamma) - \text{Sin}\, \delta]]$. Eben so ist $\varrho\, \text{Cos}\, [n\,(\beta + \gamma) - \omega] = r\, \text{Cos}\, n\,(\beta + \gamma)\, (n\, \text{Cos}\, \beta - \text{Cos}\, n\beta) + r\, \text{Sin}\, n\,(\beta + \gamma)\, (n\, \text{Sin}\, \beta - \text{Sin}\, n\beta) = r\, [(\text{Cos}\, n\beta\, \text{Cos}\, n\gamma - \text{Sin}\, n\beta\, \text{Sin}\, n\gamma)\, (n\, \text{Cos}\, \beta - \text{Cos}\, n\beta) + (\text{Sin}\, n\beta\, \text{Cos}\, n\gamma + \text{Sin}\, n\gamma\, \text{Cos}\, n\beta)\, (n\, \text{Sin}\, \beta - \text{Sin}\, n\beta)] = r\, (n\, \text{Cos}\, \beta\, \text{Cos}\, n\beta\, \text{Cos}\, n\gamma - n\, \text{Cos}\, \beta\, \text{Sin}\, n\beta\, \text{Sin}\, n\gamma - \text{Cos}^2\, n\beta\, \text{Cos}\, n\gamma + \text{Cos}\, n\beta\, \text{Sin}\, n\beta\, \text{Sin}\, n\gamma + n\, \text{Sin}\, \beta\, \text{Sin}\, n\beta\, \text{Cos}\, n\gamma - \text{Sin}^2\, n\beta\, \text{Cos}\, n\gamma + n\, \text{Sin}\, \beta\, \text{Sin}\, n\gamma\, \text{Cos}\, n\beta - \text{Sin}\, n\beta\, \text{Sin}\, n\gamma\, \text{Cos}\, n\beta) = r\, [n\, \text{Cos}\, [(n - 1)\, (\beta + \gamma) + \gamma] - \text{Cos}\, n\gamma]$: und daher $u = (R + r)\, \text{Cos}\, (n - 1)\, (\beta + \gamma) - r\, [n\, \text{Cos}\, [(n - 1\, (\beta + \gamma) + \gamma) - \text{Cos}\, n\gamma] = rn\, \text{Cos}\, \delta - rn\, \text{Cos}\, (\delta + \gamma) + r\, \text{Cos}\, n\gamma = r\, [\text{Cos}\, n\gamma + n\, \text{Cos}\, \delta - \text{Cos}\, (\delta + \gamma)]$.

Man bemerke, daß hier β nicht mehr veränderlich ist; sondern immer dasselbe bleibt, was auch γ werde: man kann daher auch statt $r \operatorname{Sin} \frac{R}{r} \beta = FP$ die beständige Größe a in die Rechnung einführen, wo dann $r \operatorname{Cos} \frac{R}{r} \beta = \sqrt{r^2 - a^2}$ sein wird. Da erhält man Ausdrücke, in welchen kein andrer Winkel als γ oder Vielfache desselben vorkommen, die aber zusammengesetzter sind, als die eben gefundnen.

18. Die beiden Gleichungen $z = r [\operatorname{Sin} n\gamma - n [\operatorname{Sin} (\delta + \gamma) - \operatorname{Sin} \delta]$ und $u = r [\operatorname{Cos} n\gamma + n [\operatorname{Cos} \delta - \operatorname{Cos} (\delta + \gamma)]]$ lassen sich auf eine ähnliche Art konstruiren, wie die im vorigen Abschnitte für y und x gefundnen Gleichungen. Allein es lohnt nicht dabei zu verweilen. Ehe β nämlich seinen größten Werth erhält, interessirt die Form der Durchschnittsfläche des Stockes gar nicht, sobald man nur weiß, daß ihr Umriß gegen den Kamm convex ist; denn da zwei convexe Bogen sich nur in einem Punkte berühren können, so berührt der Kamm den Stock gewiß nur in dem Punkte F allein, und kann sich also nirgend klemmen. Wenn aber β sein Maximum erreicht hat, so fängt der Kamm an auszuwinden, und nun entsteht die Frage, ob der Stock einen solchen Durchschnitt hat, daß die vordre Ecke des Kammes, die zuletzt an F lag, nirgends anstoßen und klemmen könne? Sobald $u - r$ der halben Breite des Stokkes gleich ist; so hat der Kamm ganz ausgewunden. Da nun die Breite des Stockes nie viel über

2 bis $2\frac{1}{2}$ Zoll beträgt; so ist es nur ein sehr kleiner Bogen, innerhalb welchem die für die Ausübung brauchbaren Werthe von γ angenommen werden. Ist der Stock wie gewöhnlich cylindrisch, so krümmt er sich so schnell, daß schwerlich darüber ein Zweifel entstehen kann, ob er auch werde auswinden können, wenn die vorderste Kante nur erst bis an F ohne Klemmen gekommen ist. Man legt aber auch zuweilen Stirnräder an Kammräder, und da fragt es sich nun, ob der flächere Kamm das Auswinden nicht verhindern werde.

19. Es sei wie vorhin ein Stirnrad von 72 Kämmen mit $4\frac{1}{2}$ Zoll Theilung an einen Trilling von 35 Stöcken gelegt; β ist bis auf $7\frac{1}{2}$ Grad angewachsen. Man setze nun γ versuchsweise $1\frac{1}{2}$ Grad: so ist in Zollen $z = \frac{77,75}{\pi}$ [Sin $4^\circ\ 35\frac{1}{7}'$ — $\frac{107}{35}$ (Sin $20^\circ\ \frac{6}{7}'$ — Sin $18^\circ\ 30\frac{6}{7}'$)].

Nun hat man aus den trigonometrischen Tafeln

Sin $20^\circ\ \frac{6}{7}'$	=	0, 342 254 4
Sin $18^\circ\ 30\frac{6}{7}'$	=	0, 317 541 1
Diff.	=	0, 024 713 3
$\frac{107}{35}$ Diff.	=	0, 075 552
Sin $4^\circ\ 35\frac{1}{7}$	=	0, 079 950
Diff.	=	0, 004 398
r	=	25, 066 904
r Diff.	=	0″, 110 24

Ferner ist $u = \frac{157,5}{2\pi}$ [Cos $4^\circ\ 35\frac{1}{7}'$ + $\frac{107}{35}$ (Cos $18^\circ\ 30\frac{6}{7}'$ — Cos $20^\circ\ \frac{6}{7}'$)]

Cos $18^\circ\ 30\frac{6}{7}'$	=	0, 948 3445
Cos $20^\circ\ \frac{6}{7}''$	=	0, 939 6073
Diff.	=	0, 008 7372
$\frac{107}{35}$ Diff.	=	0, 026 711
Cos $4^\circ\ 35\frac{1}{7}'$	=	0, 996 805
Summa	=	1, 013 516
r	=	25, 066 904
r Summa	=	25, 405 70
u — r	=	0'', 338 80

Also fällt hier I schon unter die Abscissenlinie, wenn HL nur $\frac{1}{3}$ Zoll lang ist. Gesetzt man nähme $\gamma = \frac{1}{2}^\circ$ so wäre $z = \frac{157,5}{2\pi}$ [Sin $(\frac{107}{70})^\circ$ — $\frac{107}{35}$ (Sin $(\frac{1187}{70})^\circ$ — Sin $(\frac{1152}{70})^\circ$)] $= \frac{157,5}{2\pi}$ [Sin $1^\circ\ 31\frac{5}{7}'$ — $\frac{107}{35}$ (Sin $16^\circ\ 57\frac{3}{7}'$ — Sin $16^\circ\ 27\frac{3}{7}'$)]

Sin $16^\circ\ 57\frac{3}{7}'$	=	0, 291 656 4
Sin $16^\circ\ 27\frac{3}{7}'$	=	0, 283 288 1
Diff.	=	0, 008 368 3
$\frac{107}{35}$ Diff.	=	0, 025 583
Sin $1^\circ\ 31\frac{5}{7}$	=	0, 026 675
Diff.	=	0, 001 092
r Diff.	=	0'', 027 37

Man sieht hieraus, daß I auch für ein so kleines γ schon unter die Abscissenlinie fällt, und also

gewiß sich nicht klemmen kann, wenn der Durchschnitt des Stocks nur gegen den Kamm convex ist, seine Gestalt sei übrigens, welche sie wolle. Es lohnt demnach nicht der Mühe hier noch die Abscisse zu berechnen.

20. Dieß Beispiel bestätigt, was oben bereits erwähnt worden ist, daß nämlich an cylindrischen Stöcken das Auswinden in der Regel keine Schwierigkeit haben könne. Nur in den äußerst seltnen Fällen, wo ein Trilling viel größer ist, als das daran liegende Stirnrad, könnten Zweifel eintreten, welche nach Anleitung der hier gegebnen Formeln zu untersuchen wären.

Gesetzt, ein Stirnrad von 28 Kämmen läge an einem Kammrade von 84 Kämmen, welche hier die Stelle der Trillingsstöcke vertreten: die Theilung sei $4\frac{1}{2}$ Zoll, folglich $r = \frac{4\frac{1}{2} \cdot 84}{2\pi} = \frac{189}{\pi}$ $= 60'', 160\,568\,5$; β sei $18°$; n ist $\frac{4}{3}$. Man setze $\gamma = 1°$: so hat man $z = r\,[\text{Sin}\,\frac{4}{3}° - \frac{4}{3}\,(\text{Sin}\,7\frac{1}{3}° - \text{Sin}\,6\frac{1}{3}°)]$ und $u = r\,(\text{Cos}\,\frac{4}{3}° + \frac{4}{3}°)\,(\text{Cos}\,6\frac{1}{3}° - \text{Cos}\,7\frac{1}{3}°.)$ Nun hat man aus den trigonometrischen Tafeln

Sin $7\frac{1}{3}°$	=	0, 127 641 6
Sin $6\frac{1}{3}°$	=	0, 110 312 6
Diff.	=	0, 017 329 0
$\frac{1}{3}$ Diff.	=	0, 005 776 3
$\frac{4}{3}$ Diff.	=	0, 023 105 3
Sin $1\frac{1}{3}°$	=	0, 023 2690
Diff.	=	0, 000 163 7
z	=	0″, 009 85
Cos $6\frac{1}{3}°$	=	0, 993 8969
Cos $7\frac{1}{3}°$	=	0, 991 8204
Diff.	=	0, 002 0765
$\frac{1}{3}$ Diff.	=	0, 000 6922
$\frac{4}{3}$ Diff.	=	0, 002 7687
Cos $1\frac{1}{3}$	=	0, 999 7292
Sum.	=	1, 002 4979
u	=	60″, 310 84
r	=	60″, 160 57
u — r	=	0″, 150 27

Man setze ferner $\gamma = 2°$; so hat man

$$z = r\,[\text{Sin } 2\tfrac{2}{3} - \tfrac{4}{3}(\text{Sin } 8\tfrac{2}{3} - \text{Sin } 6\tfrac{2}{3})]$$

$$u = r\,[\text{Cos } 2\tfrac{2}{3} + \tfrac{4}{3}(\text{Cos } 6\tfrac{2}{3} - \text{Cos } 8\tfrac{2}{3})]$$

und daraus $z = 0'', 02416$, $u - r = 0'', 30838$.

Man setze ferner $\gamma = 3°$; so hat man

$$z = r\,[\text{Sin } 4° - \tfrac{4}{3}(\text{Sin } 10° - \text{Sin } 7°)]$$

$$u = r\,[\text{Cos } 4° + \tfrac{4}{3}(\text{Cos } 7° - \text{Cos } 10°)]$$

und daraus $z = 0'', 04320$, $u - r = 0'', 47418$.

Man setze ferner $\gamma = 4°$: so hat man

$$z = r\,[\text{Sin } 5\tfrac{1}{3}° - \tfrac{4}{3}(\text{Sin } 11\tfrac{1}{3}° - \text{Sin } 7\tfrac{1}{3}°)]$$

$u = r\,[\mathrm{Cos}\,5\tfrac{1}{3}° + \tfrac{4}{3}\,(\mathrm{Cos}\,7\tfrac{1}{3}° - \mathrm{Cos}\,11\tfrac{1}{3}°)]$ und daraus $z = 0'',06718$, $u - r = 0'',64757$.

Man sieht auch hier, daß alle Ordinaten positiv bleiben, und mithin nach der hier angenommnen Construction unter die Abscissenlinie fallen: es könnte daher der Kamm sich im Auswinden nicht klemmen, selbst wenn die Kammradskämme gar nicht nach einem convexen Bogen, sondern ganz eben nach der Richtung eines Radius bearbeitet wären. Um sich völlig davon zu überzeugen, könnte man noch z und u für einen sehr kleinen Werth von γ suchen. Es sei $\gamma = \tfrac{1}{4}°$; so ist
$z = r\,(\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{3}° - \tfrac{4}{3}\,(\mathrm{Sin}\,6\tfrac{1}{3}° - \mathrm{Sin}\,6\tfrac{1}{12}°)$
$u = r\,(\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{3}° + \tfrac{4}{3}\,(\mathrm{Cos}\,6\tfrac{1}{12}° - \mathrm{Cos}\,6\tfrac{1}{3}°)$
und daraus $z = 0'',00205$; $u - r = 0,03684$; so daß auch für diesen Fall das vorige Resultat noch wahr bleibt.

21. Da man nicht leicht kleinere Stirnräder an größre Kammräder legen wird; so kann man ganz allgemein annehmen, daß Stirnradskämme von der im ersten Abschnitte erwähnten Form allemal ohne Klemmung auswinden können, wenn nur der Trillingsstock, oder der seine Stelle vertretende Kammradskamm überhaupt eine konvexe Oberfläche hat, gleichviel übrigens, wie flach auch der konvexe Bogen ausfalle. Greift also ein Kammrad in irgend einen Trilling, und müssen, wie sich weiterhin zeigen wird, die Kämme desselben deswegen eine dem Queerdurchschnitte nach convexe Oberfläche haben, so kann unbedenklich an dasselbe Kammrad auch ein Stirnrad von kleinem Durchmesser gelegt werden. Diese Zusammensetzung ist zuweilen sehr bequem,

um größeres und vielfacheres Räderwerk zu ersparen. Indessen ist sie doch nur zu loben, so lange die Kammradskämme noch neu, und wenig abgearbeitet sind. Zeigen sich aber erst merkliche Eindrücke der Stirnradskämme auf den Kämmen des Kammrads; so ist bald die Verschirrung aller drei Räder verdorben. Es sind nämlich diese Eindrücke sehr verschieden von denjenigen, welche die Trillingsstöcke auf den Kammradskämmen hinterlassen; und diese Verschiedenheit der Eindrücke giebt in kurzer Zeit den Kammradskämmen eine solche Mißgestalt, daß sie sowohl die Trillingsstöcke, als auch die Kämme des Stirnrades sehr bald ganz verderben. Man kann daher diese bequeme Verbindung von Räderwerke nur da brauchen, wo nicht eine schnelle Abnutzung der Verschirrung zu besorgen ist; mithin nur bei leichten Werken, starken Theilungen, und zuverläßig festem Schirrholze.

22. Man sieht, wiewohl höchst selten, Stirnräder, deren Ebnen einen rechten Winkel mit einander machen, an einander gelegt. Sind die Kämme des einen Stirnrades nach den Vorschriften des ersten Abschnittes geformt, und die des andern im Queerschnitte flach erhaben; so läßt sich gegen die Anwendung einer solchen Verbindung an sich gar nichts einwenden. Indessen ist auch eben kein besondrer Nutzen derselben einzusehen; und da bei der in den Mühlen einmal eingeführten Bauart des Räderwerks die Kammräder, zumal wenn sie mit Rückstücken verfertigt werden, unstreitig fester sind als die Stirnräder: so wird es mit Recht immer üblicher bleiben, zu Rädern, deren Ebnen recht-

winklicht gegen einander liegen, Kammräder und Trillinge, oder Kammräder und von den Holländern sogenannte Bunkler zu wählen.

23. Gewöhnlich läßt man die Stirnräder in Trillinge greifen, und wählt nur dann Kammräder statt der Trillinge, wenn diese zu groß und daher zu schwer werden müßten. Einige Mühlenbaumeister brauchen indessen gern Kammräder auch schon statt mäßiger Trillinge. Dieß Verfahren macht allerdings die Reparaturen bequemer; denn ein einzelner Kammradskamm ist leicht mit einem andern zu vertauschen, wenn er etwan schadhaft geworden ist. Allein ein guter Trilling ist ohne Zweifel fester, als ein jedes Kammrad, weil hier der Stock an beiden Enden befestigt ist, dagegen der Kamm nur mit einem Ende in dem Holze des Kammrades steckt. Es scheint daher, daß wenigstens für schwerarbeitende Werke das gewöhnlichste Verfahren auch das vorzüglichste sei.

Es hat sich im ersten Abschnitte ergeben, daß man nicht ohne Nachtheil Trillinge von sehr verschiednem Durchmesser an ein und dasselbe Stirnrad legen könne. Dagegen hat sich hier gezeigt, daß jedes Stirnrad von gewöhnlicher Größe aus jedem Kammrade auswinden könne, dessen Kämme nur überhaupt einen convexen Durchschnitt haben. Man könnte daher das Verfahren umkehren, und statt Trillinge oder Kammräder von verschiednem Durchmesser an einerlei Stirnrad legen zu wollen, an ein und eben dasselbe Kammrad mehrere Stirnräder

von verschiednem Durchmesser legen. Der Vorschlag hat nur die Schwierigkeit, daß man unbedenklich Trillinge von sechs bis einigen vierzig Stökken verfertigen kann, dagegen es schwer werden dürfte, dauerhafte Stirnräder von weniger als 24 Kämmen aus Holz zu construiren.

III.

Untersuchungen über die Gestalt der Zähne an gezähnten graden Stangen, welche durch Getriebe mit cylindrischen Stöcken in Bewegung gesetzt werden.

24. Es sei in Fig. 5. AB ein Bogen des Theilungskreises eines Getriebes, dessen Mittelpunkt in C ist. AE sei eine grade Linie, in welcher die Theilungspunkte einer gezähnten graden Stange liegen, und die den Bogen AB in A berührt. Es bewege sich der Punkt A an irgend einem Stocke des Getriebes nach B, indem sich das Getriebe um den Winkel α dreht; so wird binnen eben der Zeit der Punkt A an irgend einem Zahne der Stange nach D gekommen sein, so daß AD eben so lang sein wird, als der Bogen AB, und es wird jetzt ein andrer Punkt desselben Zahnes an B liegen. Man sucht die Lage dieses Punktes gegen D mittelst rechtwinklicher Coordinaten zu bestimmen; so

daß der Perpendikel DF die Abscisse x, und die Linie BF die Ordinate y sei. Der Nullpunkt der Abscissen mag in der Linie AE liegen. AC sei r. Da hat man nun $AE = r \tang \alpha$; $AD = r \operatorname{arc} \alpha$; folglich $DE = r (\tang \alpha - \operatorname{arc} \alpha)$. Ferner $CE = r \operatorname{Sec} \alpha$; $BE = CE - BC = r (\operatorname{Sec} \alpha - 1)$. Nun sind die Dreiecke ACE, DGE, FBG einander ähnlich. Folglich $DG = DE . \cot \alpha = r . \cot \alpha (\tang \alpha - \operatorname{arc} \alpha)$, und $EG = DE . \operatorname{Cosec} \alpha = r \operatorname{Cosec} \alpha (\tang \alpha - \operatorname{arc} \alpha)$; daher $BG = BE - EG = r (\operatorname{Sec} \alpha - 1) - r \operatorname{Cosec} \alpha (\tang \alpha - \operatorname{arc} \alpha)$, und $BF = y = BG \operatorname{Sin} \alpha = r \operatorname{Sin} \alpha [(\operatorname{Sec} \alpha - 1) - \operatorname{Cosec} \alpha (\tang \alpha - \operatorname{arc} \alpha)]$. Ferner $FG = BG \operatorname{Cos} \alpha = r \operatorname{Cos} \alpha [(\operatorname{Sec} \alpha - 1) - \operatorname{Cosec} \alpha (\tang \alpha - \operatorname{arc} \alpha)]$; und $x = DG + FG = r \operatorname{Cos} \alpha [(\operatorname{Sec} \alpha - 1) - \operatorname{Cosec} \alpha (\tang \alpha - \operatorname{arc} \alpha)] + r \cot \alpha (\tang \alpha - \operatorname{arc} \alpha]$.

Es kommt nun darauf an, diese Ausdrücke für x und y bequemer einzurichten, wozu folgendes dienen kann. Es ist $\operatorname{Sec} \alpha - 1 = \frac{1 - \operatorname{Cos} \alpha}{\operatorname{Cos} \alpha}$, ferner $\operatorname{Cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{Sin} \alpha}$; $\operatorname{Cosec} \alpha \operatorname{Sin} \alpha = 1$; und endlich $\tang \alpha = \frac{\operatorname{Sin} \alpha}{\operatorname{Cos} \alpha}$. Setzt man diese Werthe in den Ausdruck für y, so erhält man $y = r \left(\frac{\operatorname{Sin} \alpha - \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Cos} \alpha}{\operatorname{Cos} \alpha} - \frac{\operatorname{Sin} \alpha}{\operatorname{Cos} \alpha} + \operatorname{arc} \alpha \right) = r (\operatorname{arc} \alpha - \operatorname{Sin} \alpha)$.

Bemerkt man ferner, daß $\text{Cosec}\,\alpha\ \text{Cos}\,\alpha = \text{Cot}\,\alpha$; so hat man $x = r\,(1 - \text{Cos}\,\alpha)$.

Für $\alpha = 0$, werden x und $y = 0$. Was etwan α äußerstens werden könnte, muß man aus der Anzahl Stöcke, welche auf einmal eingreifen sollen, beurtheilen. Dann könnte man, wie vorhin, die Werthe von x und y für das halbe und ganze Maximum von α berechnen, und durch die drei gefundnen Punkte einen Kreisbogen beschreiben, der nicht merklich von dem Bogen der krummen Linie, die den Kamm eigentlich begränzt, abweichen würde. Durch bloße Verzeichnung läßt sich y nicht finden, weil man geometrisch keine grade Linie verzeichnen kann, welche so lang ist, als ein gegebner Kreisbogen.

25. Es liege z. B. ein eisernes Getriebe von 9 Stöcken, welches 6 Zoll im Durchmesser des Theilungskreises hat, an einer eisernen gezähnten Stange. Bei der starken Krümmung eines so kleinen Getriebes werden höchstens zwei Kämme zugleich ergriffen werden, mithin α höchstens 40 Grad sein. Ist nun der Umfang für den Radius $1 = 6,283\,185\,3$: so ist der Bogen von 40° ein Neuntheil davon, oder

		0, 698 131 7
$\text{Sin}\ 40^\circ$	=	0, 642 787 6
Diff	=	0, 055 344 1
$y = r$ Diff	=	0″, 166 032 3
und $\text{Cos}\ 40^\circ$	=	0, 766 044 4
$1 - \text{Cos}\ 40^\circ$	=	0, 233 955 6
$x = r\,(1 - \text{Cos}\,40^\circ)$	=	0″, 701 866 8

Ferner ist der Bogen von 20°

	=	0, 349 065 8
Sin 20°	=	0, [illegible] 20 1
Diff	=	0, 007 045 7
y = r Diff	=	0″, 021 137 1
und Cos 20°	=	0, 939 6926
1 — Cos 20°	=	0, 060 3074
x = r (1 - Cos 20°)	=	0″, 180 9222

Es ist hier die Theilung 2, 094 Zoll, folglich der Kamm etwan $\frac{4}{5}$ Zoll; davon gehen an dem äußersten Ende auf jeder Seite 0, 166 Zoll ab; er bleibt also daselbst noch 0, 468 oder beinahe $\frac{1}{2}$ Zoll breit.

26. Wie die hier gefundnen Formeln mit den Ausdrücken für x und y zusammen hängen, die im ersten Abschnitte gefunden wurden, übersieht man so. Es war §. 1. $y = (R + r) \sin \beta - r \sin (\alpha + \beta)$. Nun ist hier die gezähnte Stange für einen Kreis zu achten, dessen Radius unendlich groß ist. Es verschwindet also r gegen R und man kann statt $(R + r) \sin \beta$, $R \sin \beta$ setzen. Ferner ist $R : r = \alpha : \beta$; also $\beta = \frac{r\alpha}{R}$, das ist, für $R = \infty$, unendlich klein. Es verschwindet daher auch β gegen α, und man kann statt $r \sin (\alpha + \beta)$ blos $r \sin \alpha$ setzen. Nun hat man $y = R \sin \beta - r \sin \alpha$, wofür man, weil der Sinus eines unendlich kleinen Bogens von seinem Bogen nicht zu unterscheiden ist $R \,\mathrm{arc}\,\beta - r \sin \alpha$ setzen kann. Es ist aber $R : r = \mathrm{arc}\,\alpha : \mathrm{arc}\,\beta$; also $R . \mathrm{arc}\,\beta = r . \mathrm{arc}\,\alpha$, und daher $y = r\ (\mathrm{arc}\,\alpha$

— Sin α), so wie es vorhin auch gefunden wurde. Gleichermaßen war §. 1. $x = (R + r) \text{Cos}\ \beta - r\ \text{Cos}\ (\alpha + \beta)$, und also, wenn wie hier der Anfang der Absciſſen in den Theilungskreis des Stirnrades gelegt wird, die Abſciſſe $(R + r) \text{Cos}\ \beta - r\ \text{Cos}\ (\alpha + \beta) - R$. Iſt β unendlich klein, so iſt $\text{Cos}\ \beta = 1$ und $\text{Cos}\ (\alpha + \beta)$ von $\text{Cos}\ \alpha$ nicht verschieden: folglich wird alsdann aus dem vorigen Ausdrucke $r - r\ \text{Cos}\ \alpha = r\ (1 - \text{Cos}\ \alpha)$, so wie es auch vorhin gefunden wurde.

27. Ob die Kämme bei der angegebnen Geſtalt auch zwiſchen cylindriſchen Stöcken ohne Hinderniß auswinden können, kann man folgendermaßen unterſuchen. Es drehe ſich das Getriebe weiter um den Winkel δ, so wird der Punkt B an irgend einem Stocke des Getriebes den Bogen BO durchlaufen, während ſich der Punkt B an irgend einem Zahne der Stange durch die grade Linie BM bewegt, welche so lang, als der Bogen BO, und parallel mit AE iſt. Man ſucht die Lage von M gegen O mittelſt rechtwinklicher Coordinaten zu beſtimmen. Nun iſt $AH = r.\text{tang}\ (\alpha + \delta)$, $AC : AH = CN : KN$; alſo $KN = \dfrac{AH \times CN}{AC}$ $= r\ \text{tang}\ (\alpha + \delta)\ \text{Cos}\ \alpha$; $KM = KN - MN$ $= r.\text{tang}\ (\alpha + \delta)\ \text{Cos}\ \alpha - r\ \text{Sin}\ \alpha - r.\text{arc}\ \delta$ und $LM = z = KM.\text{Cos}\ (\alpha + \delta) = r\ \text{Sin}\ (\alpha + \delta)\ \text{Cos}\ \alpha - r\ \text{Sin}\ \alpha\ \text{Cos}\ (\alpha + \delta) - r.\text{arc}\ \delta.\text{Cos}\ (\alpha + \delta) = r\ (\text{Sin}\ \delta - \text{arc}\ \delta.\text{Cos}\ (\alpha + \delta))$. Ferner iſt $CH = r\ \text{Sec}\ (\alpha + \delta)$ und $AC : CH = CN : CK$; alſo $CK = \dfrac{CH \times CN}{AC} = r\ \text{Sec}$

$(\alpha + \delta) \text{ Cos } \alpha$. Endlich ist $KL = KM . \text{Sin} (\alpha + \delta) = r \frac{\text{Sin}^2 (\alpha + \delta) \text{ Cos } \alpha}{\text{Cos } (\alpha + \delta)} - r \text{ Sin } \alpha \text{ Sin} (\alpha + \delta) - r . \text{arc } \delta \text{ Sin } (\alpha + \delta)$ und $CL = CK - KL = r \left(\text{Sec } (\alpha + \delta) - \frac{\text{Sin}^2 (\alpha + \delta)}{\text{Cos } (\alpha + \delta)} \right) \text{Cos } \alpha + r \text{ Sin } \alpha \text{ Sin } (\alpha + \delta) + r \text{ arc } \delta \text{ Sin} (\alpha + \delta) = r \left(\frac{1 - \text{Sin}^2 (\alpha + \delta)}{\text{Cos } (\alpha + \delta)} \right) \text{Cos } \alpha \; r \text{ Sin } \alpha \text{ Sin } (\alpha + \delta) + r \text{ arc } \delta \text{ Sin } (\alpha + \delta) = r (\text{Cos } \delta + \text{arc } \delta \text{ Sin } (\alpha + \delta)) = u$. So lange hier z bejaht ist, fällt M unter die Abscissenlinie CL, und so lange stößt auch das Vorderende des Zahnes nicht an den Getriebstock an, wenn der Durchschnitt desselben nur überhaupt gegen den Zahn convex ist. Das hat nun im Allgemeinen schon große Wahrscheinlichkeit für sich. Ist nämlich δ sehr klein; so ist arc δ sehr wenig größer, als Sin δ, und es ist daher, wenn α nicht etwan auch sehr klein, was doch in der Regel nicht der Fall sein kann, arc δ Cos (α + δ) kleiner als Sin δ, mithin z etwas positives. Wird δ größer, so wächst freilich arc δ schneller als Sin δ; dagegen aber wird auch Cos (α + δ) immer kleiner, je größer δ wird, und es wird also arc δ durch einen immer mehr abnehmenden Bruch multiplicirt. Deutlicher könnte man die Sache so übersehen. Wenn es erlaubt ist, für δ jeden positiven Werth anzunehmen, insofern nur α + δ kleiner als ein rechter Winkel bleibt: so kann man auch δ einmal so klein annehmen, daß arc δ von Sin δ nicht mehr um irgend eine angebbare

Größe verschieden ist: in diesem Falle ist Sin δ offenbar größer als arc δ Cos (α + δ). Gesetzt, es wachse arc δ um dδ; so wächst Sin δ um Cos δ × dδ, ferner nimmt ab Cos (α + δ) um Sin (α + δ) × dδ; es wächst daher das Produkt arc δ Cos (α + δ) um dδ (Cos (α + δ) — arc δ Sin (α + δ)). Es ist aber schon Cos (α + δ) dδ kleiner als Cos δ dδ; folglich wächst arc δ Cos (α + δ) langsamer, als Sin δ. Ist daher z für irgend ein sehr kleines δ positiv, so bleibt es für alle hier anwendbaren Werthe positiv; und es leidet daher gar keinen Zweifel, daß die Zähne der Stange ohne alles Klemmen auswinden können, so lange nur der Durchschnitt der Getriebstöcke gegen sie convex ist, es sei auch dieser convexe Bogen so flach er immer wolle. Man könnte daher auch unbedenklich statt des Getriebes mit cylindrischen Stöcken ein kleines Kammrad mit im Querschnitte flach erhabnen Kämmen in die gezähnte Stange eingreifen lassen.

28. Der Heigel in den Schneidemühlen, mittelst welchem der Schlitten fortgezogen wird, ist eine solche gezähnte Stange: man findet Zeichnungen der Verzahnung, welche dazu gehört, in den bekannten holländischen Mühlenbüchern; es ist aber dabei auch nicht Rücksicht auf den verschiednen Durchmesser der daran liegenden Getriebe genommen. Das hat indessen hier wenig zu bedeuten; da es auf die Größe des Getriebes hier nur insofern ankommt, als man daraus das schickliche Maximum für α bestimmt. Denn übrigens bleibt die

Form der Zähne sich immer ähnlich, weil $n = \frac{R + r}{r}$, wovon die Verschiedenheit der Krümmung des Zahnes abhängt, für jeden endlichen Werth von r hier immer dasselbe, nämlich immer unendlich bleibt. Außerdem kommen noch gezähnte Stangen bei Pumpenwerken, und überhaupt da vor, wo eine in grader Linie auf und nieder gehende Bewegung mit einer rotirenden verbunden werden soll.

IV.

Untersuchungen über die Gestalt der Stirnradskämme, wenn der Trilling innerhalb des Stirnrads liegt.

29. Man drehte an den holländischen Windmühlen sonst die Haube, oder das bewegliche Dach, mittelst eines Verbandes von Zimmerholze, der mit den Balken der Haube unbeweglich zusammen gefügt ist, und von außen bis auf den Heckgang herabreicht. Jetzt hat man diese Einrichtung hie und da abgeändert, und dreht die Haube von innen. Es sind nämlich in den Rollring Stirnradskämme längst seinem ganzen innern Umfange eingesetzt; an diesen liegt ein Getriebe auf einer stehenden Welle, die in die untern Stockwerke herabreicht, und dort auf mannichfaltige Art in Bewegung gesetzt werden kann. Dauerhafter mag diese Einrichtung allerdings seyn, als die alte; sie ist aber auch weit zu-

sammengesetzter. Den Arbeitern möchte sie auch wenig Erleichterung verschaffen. Indessen kann man doch Gründe haben sie vorzuziehen; auch könnte vielleicht in andern Fällen mit entschiedenem Vortheile von einer ähnlichen Vorrichtung Gebrauch gemacht werden. Da entsteht nun die Frage, wie hier die Kämme gestaltet sein müssen?

30. Es sei in Fig. 6. AD ein Bogen des Theilungskreises eines von innen verschirrten Stirnrades, dessen Mittelpunkt in B ist, und AH ein eben so langer Bogen des Theilungskreises eines Getriebes, dessen Mittelpunkt in C ist. Beide Bogen berühren sich in A; AB sei $= R$, AC $= r$. Indem der Punkt A an irgend einem Stocke des Getriebes sich nach H bewegt, wird der Punkt A an irgend einem Kamme des Stirnrades sich nach D bewegen, und es wird ein andrer Punkt desselben Kammes an H liegen. Man sucht die Lage von H durch Abscissen x von B aus gerechnet auf dem Radius BD, und rechtwinkliche Ordinaten y.

Es ist $BC = R - r$; $CI = r \operatorname{Cos} \alpha$; also $BI = (R - r) + r \operatorname{Cos} \alpha$; $DK = R \operatorname{Sin} \beta$; $BK = R \operatorname{Cos} \beta$ und $BK : BI = DK : EI$ folglich $EI = \frac{BI \times DK}{BK} = \frac{\operatorname{Sin} \beta [(R - r) + r \operatorname{Cos} \alpha]}{\operatorname{Cos} \beta}$.

Ferner ist $HI = r \operatorname{Sin} \alpha$, $EH = EI - HI$

$$= \frac{\operatorname{Sin} \beta\ [(R - r) + r \operatorname{Cos} \alpha] - r \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Cos} \beta}{\operatorname{Cos} \beta}$$

$$= \frac{(R - r) \operatorname{Sin} \beta - r \operatorname{Sin} (\alpha - \beta)}{\operatorname{Cos} \beta},$$ und $y = HF$

$= EH \operatorname{Cos} \beta = (R - r) \operatorname{Sin} \beta - r$

Sin $(\alpha - \beta)$. Weiter ist $EF = EH \operatorname{Sin} \beta$ $= \frac{(R - r) \operatorname{Sin}^2 \beta - r \operatorname{Sin} \beta \operatorname{Sin} (\alpha - \beta)}{\operatorname{Cos} \beta}$ und $BK : BD$ $= BI : BE$; folglich $BE = \frac{BI \times BD}{BK}$ $= \frac{(R - r) + r \operatorname{Cos} \alpha}{\operatorname{Cos} \beta}$; und $BF = BE - EF$

$$= \frac{(R - r)(1 - \operatorname{Sin}^2 \beta) + r [\operatorname{Cos} \alpha + \operatorname{Sin} \beta \operatorname{Sin} (\alpha + \beta)]}{\operatorname{Cos} \beta}$$

$$= \frac{(R - r) \operatorname{Cos}^2 \beta + r (\operatorname{Cos} \alpha - \operatorname{Sin}^2 \beta \operatorname{Cos} \alpha + \operatorname{Sin} \beta . \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Cos} \beta)}{\operatorname{Cos} \beta}$$

$$= \frac{(R - r) \operatorname{Cos}^2 \beta + r (\operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos}^2 \beta + \operatorname{Sin} \beta \operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Cos} \beta)}{\operatorname{Cos} \beta}$$

$= (R - r) \operatorname{Cos} \beta + r \operatorname{Cos} (\alpha - \beta) = x$. Endlich ist $R : r = \alpha : \beta$; also $(R - r) : r$ $= (\alpha - \beta) : \beta$; folglich $(\alpha - \beta) = \frac{(R - r)}{r} \beta$.

Ist nun $\frac{R - r}{r} = m$; so ist $y = r (m \operatorname{Sin} \beta$ $- \operatorname{Sin} m\beta)$, und $x = r (m \operatorname{Cos} \beta + \operatorname{Cos} m\beta)$.

31. Wie diese Formeln mit den Ausdrücken zusammen hängen, welche im ersten Abschnitte für y und x gefunden wurden, übersieht man folgendermaßen. Dort war $y = (R + r) \operatorname{Sin} \beta - r$ $\operatorname{Sin} (\alpha + \beta)$. Hier fallen r und α auf die entgegengesetzte Seite, und sind also verneint; es wird daher $y = (R - r) \operatorname{Sin} \beta + r \operatorname{Sin} (-\alpha + \beta)$. Es ist aber $\operatorname{Sin} (-\alpha + \beta) = - \operatorname{Sin} (\alpha - \beta)$ weil für $R > r$ auch $\alpha > \beta$ wird; dieß mit $+ r$ multiplicirt giebt $- r \operatorname{Sin} (\alpha - \beta)$. So wird y $= (R - r) \operatorname{Sin} \beta - r \operatorname{Sin} (\alpha - \beta)$ Ferner

war dort $x = (R + r) \cos \beta - r \cos (\alpha + \beta)$: daraus wird nun, weil r und α verneint sind, $(R - r) \cos \beta + r \cos (-\alpha + \beta)$; es ist aber $\cos (-\alpha + \beta)$ völlig einerlei mit $\cos (\alpha - \beta)$, und daher $x = (R - r) \cos \beta + r \cos (\alpha - \beta)$.

32. Man kann nun nach diesen Formeln, wie im ersten Abschnitte, zeichnen und rechnen. Die Verzeichnung für y ist ganz dieselbe, nur daß man hier, statt $n = \frac{R}{r} + 1$, $m = \frac{R}{r} - 1$ hat; bei x ist überdem noch auf die Verschiedenheit der Zeichen zu achten; dort wurde $r \cos m\beta$ abgezogen, wenn $m\beta <$ Rect, und zugesetzt, wenn $m\beta >$ Rect: hier geschieht wegen des entgegengesetzten Zeichens das Umgekehrte. Wie in den gewöhnlichsten Fällen die Gestalt der Kämme ausfalle, mag folgendes berechnete Beispiel zeigen. Es sei $R = 10$ Fuß, $r = \frac{3}{4}$ Fuß, welche Dimensionen in der Haube einer holländischen Windmühle ohngefähr Statt finden könnten: so verhält sich die Anzahl der Getriebstöcke zu der Anzahl der Kämme im Rollringe, wie $\frac{3}{4} : 10 = 3 : 40$. Für einen Durchmesser von $1\frac{1}{2}$ Fuß ist der Umfang $56,549$ Zoll. Gäbe man dem Getriebe 12 Stöcke, so würde die Theilung $4,712$, oder nah $4\frac{3}{4}$ Zoll, und es bekäme der Rollring 160 Kämme. Es kommt hier nicht darauf an, ob die Anzahl der Stöcke und Kämme Faktoren gemein hat, oder ob beide Zahlen keinen gemeinschaftlichen Divisor haben: denn da die ganze Vorrichtung nicht zum beständigen Gange bestimmt ist; sondern nur zuweilen, und im-

mer nur auf kurze Zeit in Bewegung gesetzt wird; so ist die Abnutzung überhaupt unbedeutend, und die Mühle kann viele Jahre stehen, ehe nur Spuren davon bemerkbar werden. M ist hier $\frac{9\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{37}{3}$ $= 12\frac{1}{3}$. Für das Maximum von ß könnte man ohngefähr 3° annehmen. Hieraus hat man nun Folgendes.

m Sin 3°	=	0, 645 477
Sin m.3°	=	0, 601 815
Diff.	=	0, 043 662
y = r Diff.	=	0″, 392 96
m.Cos 3°	=	12, 316 430
Cos m.3°	=	0, 793 353
Sum.	=	13, 109 783
x = r.Sum.	=	117″, 988 05
R — x	=	2″, 011 95

Für das halbe Maximum von ß oder $1\frac{1}{2}$ Grad bekommt man auf ähnliche Art y = 0″, 049 89, und R — x = 0″, 50313. Da hat man nun drei Punkte, mittelst welcher man den Kamm verzeichnen kann. Ist der Kamm $\frac{2}{5}$ der Theilung oder 1″, 885, so bleibt er am Vorderende noch 1″, 101 breit, welches hinlänglich ist.

33. Man wird hier nicht leicht Ursache haben, statt des Getriebes mit cylindrischen Stöcken ein Kammrad vorlegen zu wollen. Denn es kommt zunächst darauf an, die Haube mit der geringst möglichen Kraft, wenn es sein kann, durch einen

einzigen Arbeiter herumdrehen zu lassen. Die Bewegung muß daher langsam geschehen. Folglich muß man ein sehr kleines Rad an den mit Kämmen versehenen Rollring legen, welches wegen der nöthigen Festigkeit nicht füglich etwas anders, als ein Getriebe sein kann, da sehr kleine Kammräder keine hinlänglich feste Construction zulassen. Dieselben Betrachtungen werden auch in jedem andern Falle eintreten, wo man eine ähnliche Vorrichtung anwenden könnte. Es kann nämlich der Ring, der hier statt des Stirnrades dient, nie an einer Welle befestigt sein; sondern er muß seinem ganzen Umfange nach auf Rollen aufliegen. Dadurch aber verursacht seine Bewegung eine so große Reibung, daß man nie auf den Gedanken wird fallen können, ihn sehr schnell herumzubewegen. Man wird also immer nur ein kleines Getriebe an ihn legen können. Solche kleine Getriebe aber krümmen sich so schnell, daß die Untersuchung der Frage, ob die Kämme denn hier auch auswinden können, überflüssig zu sein scheint.

V.

Untersuchungen über die Gestalt der Kammradskämme für Trillinge mit parallelen und cylindrischen Stöcken.

34. Es sei in Fig. 7. die grade Linie DE der Durchschnitt der Ebne des Theilungskreises des Kammrades, wovon AM ein Bogen ist und dessen Mittelpunkt sich in B befindet, und der senkrecht darauf stehenden Ebne des Theilungskreises des Trillings, wovon AH ein Bogen ist und dessen Mittelpunkt sich in C befindet. Beide Kreise berühren sich in A, und DE ist demnach ihre gemeinschaftliche Tangente an A. G sei der Mittelpunkt eines Trillingsstocks, dessen Radius die Sehne AG ist. Während sich der Punkt A an irgend einem Kamme nach M bewegt, bewegt sich G nach H; so daß die Bogen AM, GH gleich lang sind. Man ziehe nun LH senkrecht auf AC, welches in einerley Vertikalebne mit AB liegt, und setze darauf HI = AG. Endlich fälle man aus I auf AE

den Perpendikel IF und ziehe FN parallel AB; so ist FN der Durchschnitt einer Ebne, welche den Stock H berührt, und senkrecht auf den Ebnen beider Theilungskreise steht, mit der Ebne des Theilungskreises des Kammrades. AF ist die Entfernung dieser Ebne von der Ebne CAB; mithin auch gleich der Entfernung des Umfanges des Trillingsstockes H von der Ebne CAB; MS senkrecht auf AB gezogen, ist die Entfernung des Punktes M von eben derselben Ebne. Nun sei der Winkel ABM = β; so ist, weil die Bogen AM, GH gleich lang sind, der Winkel GCH = $\frac{AB}{AC}\beta$, oder AB = R, AC = r gesetzt = $\frac{R}{r}\beta$. Ferner der Winkel ACG = γ; so ist HL = r Sin $\left(\frac{R}{r}\beta + \gamma\right)$; AG = 2r Sin $\frac{1}{2}\gamma$; folglich IL = r $\left[\text{Sin}\left(\frac{R}{r}\beta + \gamma\right) - 2\ \text{Sin}\ \frac{1}{2}\gamma\right]$. MS ist = R Sin β = r $\left(\frac{R}{r}\ \text{Sin}\ \beta\right)$. Es ist aber Sin $\left(\frac{R}{r}\beta + \gamma\right)$ kleiner als Sin $\frac{R}{r}\beta$ + Sin γ, und Sin γ kleiner als 2 Sin $\frac{1}{2}\gamma$; folglich Sin $\left(\frac{R}{r}\beta + \gamma\right)$ — 2 Sin $\frac{1}{2}\gamma$ kleiner als Sin $\frac{R}{r}\beta$. Nun ist schon Sin $\frac{R}{r}\beta$ kleiner als $\frac{R}{r}$ Sin β, vorausgesetzt daß $\frac{R}{r}$ größer als eins ist, welches in der Ausübung in

der

der Regel der Fall sein wird: folglich ist Sin $\left(\frac{R}{r}\beta + \gamma\right) - 2 \text{ Sin } \frac{1}{2}\gamma$ um so mehr kleiner als $\frac{R}{r}$ Sin β; also AF kleiner als MS. Es kann also in A kein Punkt eines Kammes, der prismatisch ist und senkrecht auf der Ebne ABE steht, den Getriebstock G berühren, weil sonst der Kamm beim Fortrücken an den Trillingsstock, der nicht so schnell von der Ebne CAB abrückt, als er selbst, anstoßen, und durch denselben im Fortgange gehindert werden würde. Der Ausdruck prismatisch ist hier in dem weiten Sinne genommen, in welchem jeder Körper prismatisch heißt, welcher beschrieben wird, indem eine Ebne, ohne sich zu drehen, sich parallel mit sich selbst fortbewegt: die Grundflächen könnten also auch krummlinichte Figuren sein.

35. Man könnte zunächst versuchen den Ausdruck, für IL bequemer zu machen. Man hat keine kleinere Getriebe, als solche von sechs Stöcken, und keine größeren Stöcke, als solche, die $\frac{3}{10}$ der Theilung zum Radius haben: mithin ist der Bogen AG höchstens $\frac{1}{20}$ des Umfanges, also der Winkel γ höchstens 18 Grade. Es ist aber

2 Sin 9°	=	0, 312 8690
Sin 18°	=	0, 309 0170
Beider Differenz	=	0, 003 8520

Die größte Theilung, welche in Mühlen gebräuchlich ist, pflegt nicht über $5\frac{1}{4}$ Zoll zu sein. Man nehme indeß 6 Zoll dafür, so ist der Unterschied

beider Sinus höchstens 0, 023 112 Zolle, das ist wenig über $\frac{1}{4}$ Linie, welches in der Ausübung schon ziemlich unbedeutend wird. Es wäre aber zu wünschen, daß man keine Getriebe unter neun Stöcken machte, weil die sechsstöckigen sich zu schnell abnuzzen, und wegen der sehr kleinen Scheiben überhaupt nicht dauerhaft aus Holz verfertigt werden können. Da wäre höchstens $\gamma = 12^\circ$. Es ist aber

2 Sin. 6°	=	0, 209 0570
Sin 12°	=	0, 207 9117
Beider Differenz	=	0, 001 1453

Nimmt man nun die gewöhnlichste Theilung zu $4\frac{1}{2}$ Zoll, so ist der Radius des Getriebes $= \frac{9 \cdot 4\frac{1}{2}}{2\pi}$ $= 6''$, 445 7753; mithin der Unterschied zwischen beiden Sinus nur 0, 007 382 3 Zolle, d. i. wenig über $\frac{1}{12}$ Linie, welches für die Ausübung offenbar ganz unbedeutend ist. Man kann daher in allen gewöhnlichen Fällen mit Sicherheit statt 2 Sin $\frac{1}{2}\gamma$, Sin γ setzen. So hat man $IL = r\left[\text{Sin}\left(\frac{R}{r}\beta + \gamma\right) - \text{Sin}\,\gamma\right]$, wofür man sogar, wenn $\frac{R}{r}\beta$ nicht über $\frac{1}{2}\gamma$ ist ohne bedeutenden Fehler blos $r\,\text{Sin}\,\frac{R}{r}\beta$ wird setzen können.

36. Wie viel in einem sehr gewöhnlichen Falle MS größer werden könne, als IL, wird man aus folgendem Beispiele ersehen. An einem Kammrade

von 64 Kämmen liege ein Getriebe von 9 Stöcken. R sei 4 Fuß oder 48 Zoll; folglich $r = \frac{9 \cdot 48}{64}$ $= 6\frac{3}{4}$ Zoll. Die Theilung ist hier $\frac{2 \cdot 48 \cdot \pi}{64} = \frac{3}{2}\pi$ $= 4,7124$ oder sehr nahe $4\frac{23}{32}$ Zoll, welches für einen Mahlgang schon eine starke Theilung ist. Nimmt man $\frac{3}{5}$ der Theilung für den Stock, so ist γ wie vorhin 12 Grade. Weil das Getriebe ziemlich klein gegen das Kammrad ist: so werden schwerlich mehr als zwei Stöcke zugleich zwischen den Kämmen liegen können; mithin wird $\frac{R}{r}\beta$ höchstens 40 Grade, folglich $\beta = \frac{9 \cdot 40}{64} = \frac{45}{8} = 5^\circ\ 37\frac{1}{2}'$ sein. Dieß zum Grunde gelegt, hat man

$\text{Sin}\left(\frac{R}{r}\beta + \gamma\right) = \text{Sin}\ 52^\circ$	=	0,788 0107
$2\ \text{Sin}\ \frac{1}{2}\gamma = 2\ \text{Sin}\ 6^\circ$	=	0,209 0570
Beider Differenz	=	0,578 9537
IL = r Diff.	=	3″,907 937
$R\ \text{Sin}\ \beta = R . \text{Sin}\ 5^\circ . 37\frac{1}{2}$	=	4″,704 821
Mithin ist MS hier größer um	=	0″,796 884

das ist über $\frac{3}{4}$ Zoll, welches sehr viel ist, da der ganze Kamm nur 1″,8850, das ist wenig über $1\frac{7}{8}$ Zoll stark werden kann. Wollte man auch den Kamm conoidisch formen, so könnte man ihn doch nicht so stark zuspitzen, als hier gefordert wird.

$IF = AL$ ist $r\left[1 - \mathrm{Cos}\left(\frac{R}{r}\beta + \gamma\right)\right]$; also hier $r\,(1 - \mathrm{Cos}\ 52^\circ) = 2'',594\,285$; der Kamm greift so tief jenseits des Theilungskreises des Getriebes ein, als IF lang ist, mithin hier fast $2\frac{3}{5}$ Zoll.

37. Gewöhnlich nimmt man an, daß der Kamm um so viel jenseits des Theilungskreises in das Getriebe eingreifen soll, als der Radius des Stocks beträgt; und dieß ist in der That der tiefste Eingriff, welchen die Müller ihm zu geben wagen. Hier sollte also FI höchstens $1'',4137$, d. i. ohngefähr $1\frac{2}{5}$ Zoll sein. Demnach wäre $CL = 5'',3363$. Es ist aber $\frac{CL}{r} = \mathrm{Cos}\left(\frac{R}{r}\beta + \gamma\right) = 0,7906$; mithin in diesem Falle $\frac{R}{r}\beta = 25^\circ\ 45'$, folglich β $3^\circ,\ 37\frac{1}{4}'$. Aus diesen Daten hat man

MS	=	$3'',031\,363$
IL	=	$2'',721\,332$
Demnach ist beider Differenz	=	$0'',310\,031$

das ist etwan $\frac{5}{16}$ Zoll. Um soviel könnte man den Kamm wohl zuspitzen; denn wenn man auch von jeder Seite $\frac{5}{16}$ Zoll abnimmt, bleibt er doch noch über $1\frac{1}{4}$ Zoll stark. Unter der Voraussetzung also, daß der Kamm nicht tiefer innerhalb des Umfanges des Theilungskreises eingreift, als die halbe Dicke des Getriebstockes beträgt, kann man ihm die Figur eines abgekürzten Conoids geben. Um wie

viel er jedesmal abgespitzt werden müsse, läßt sich auf die eben gezeigte Art finden. Es würde zu schwierig, und in den mehresten Fällen nicht einmal der Mühe werth sein, die Abschrägung nach einer krummen Linie auszuarbeiten: man könnte sich daher begnügen, dem Kamme eine abgekürzt pyramidale Form zu geben; pyramidal nämlich in einem ähnlichen Sinne genommen, in welchem vorhin der Ausdruck prismatisch gebraucht wurde.

38. Es läßt sich schon im Allgemeinen übersehen, daß der Kamm am äußern Ende um desto weniger verjüngt werden dürfe, je größer r gegen R ist. Denn $\frac{R}{r}$ Sin β wird um so weniger von Sin $\frac{R}{r}\beta$ verschieden sein, je kleiner $\frac{R}{r}$ für einerlei β ist. Hätte man zum Beispiele an dem vorigen Kammrade einen Trilling von 27 Stöcken; so wäre $r = \frac{48 \cdot 27}{64} = 20\frac{1}{4}$ Zoll. Man würde hier wohl den Stöcken nur $\frac{4}{7}$ der Theilung geben können; mithin wäre der Bogen AG $= \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{27} = \frac{2}{189}$ des Umfanges, und also γ nur $3^\circ\, 48\frac{4}{7}'$. Da die Theilung die vorige, nämlich $4'', 7124$ ist; so ist der Radius des Stockes $= \frac{2 \cdot 4'', 7124}{7} = 1'', 3464$. Dieß von dem Radius des Trillings abgezogen, läßt CL $= 18'', 9036$. Hieraus hat man Cos $\left(\frac{R}{r}\beta + \gamma\right)$ $= \frac{CL}{r} = 0, 9335$, woraus man $\frac{R}{r}\beta = 17^\circ\, 11\frac{3}{7}'$

findet. $\frac{R}{r}$ ist $\frac{64}{27}$, folglich $\beta = 7^\circ\ 15'\ 8''$. Nun hat man

$MS = R . \text{Sin}\ 7^\circ\ 15'\ 8'' \quad = \quad 6'',059\ 4000$

$\text{Sin}\left(\frac{R}{r}\beta + \gamma\right) = \text{Sin}\ 21^\circ = 0,358\ 3679$

$\text{Sin}\ \gamma = \text{Sin}\ 3^\circ\ 48\frac{4}{7}' \quad = \quad 0,066\ 4397$

Beider Differenz $= 0,291\ 9282$

$IL = r . \text{Diff} \quad = \quad 5'',911\ 5460$

Mithin $MS - IL \quad = \quad 0'',147\ 8540$

Der Kamm wird also von jeder Seite nur etwan um $\frac{1}{7}$ Zoll verjüngt, und bleibt daher am äußern Ende noch 1″, 7239, das ist beinahe $1\frac{3}{4}$ Zoll stark.

39. Es giebt indeß noch eine andre Betrachtung, welche auf die Gestalt der Kammradskämme Einfluß hat, und selbst das noch anders modificirt, was bisher gezeigt worden ist. Man giebt den Kämmen nämlich gemeinhin die Länge der Theilung zur Breite. Gesetzt das, was von dieser Breite außerhalb dem Theilungskreise liegt, sei MO = e, folglich BO = R + e; so beschreibt der Punkt T, der in der Verlängerung der Linie AB liegt, den Bogen OT, während A den Bogen AM beschreibt. Aber der zubehörige Getriebstock ist alsdann nur erst bis zu dem Punkte P, welcher in der Ebne IFN liegt, seitwärts ausgewichen; ein Punkt in dem Umfange des Kreises BOT, welcher an P liegen soll, muß daher um den Bogen OP rückwärts liegen. Man sucht den Winkel OBP = δ. Es

ist der Sinus des Winkels PBT = IL : BO

$$= \frac{r\left[\text{Sin}\left(\frac{R}{r}\beta + \gamma\right) - 2\,\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}\gamma\right]}{R + e}.$$

Hieraus hat man mittelst der Sinustafel den Winkel PBT, welcher von β abgezogen den Winkel δ übrig läßt. Es sei z. B. $e = 2\frac{1}{2}$ Zoll, $\beta = 3^\circ\ 37\frac{1}{4}'$, $\gamma = 12^\circ$, $R = 4'$, $r = \frac{9}{16}'$: so ist Sin PBT $= 0{,}053\ 887\ 8$, folglich PBT $= 3^\circ\ 5\frac{1}{3}'$, und also $\delta = 0^\circ\ 31\frac{11}{12}'$ Hat man δ, so kann man die Länge des Bogens OP finden. Da δ nur immer ein sehr kleiner Winkel sein wird; so ist sein Sinus von seinem Bogen nicht bedeutend verschieden, und man kann also OP $= (R + e)$ Sin δ annehmen, welches hier $0''\ 468\ 9$ oder sehr nahe $\frac{15}{32}$ Zolle beträgt.

40. Aehnliche Betrachtungen lassen sich anstellen, wenn man β auf die andre Seite der Vertikalebne CAB legt. Es sei alsdann AY der Bogen des Theilungskreises des Kammrades, durch welchen sich der Punkt Y von Y gegen A bewegt hat: so wird binnen eben der Zeit der Punkt V sich durch den eben so langen Bogen des Theilungskreises des Trillings GV bewegt haben. Nun ziehe man VX senkrecht auf AC, trage auf dessen Verlängerung den Radius des Trillingsstockes VW = HI, fälle aus W auf DF den Perpendikel DW, und ziehe DZ parallel mit AB; so ist DZ in einer Ebne, welche den Trillingsstock V berührt, lothrecht auf den Ebnen beider Theilungskreise steht, und parallel mit der Ebne ABC ist. WX ist hier das Maaß der Entfernung des angegriffnen Punktes des Trillingsstockes von der Vertikalebne ABC.

Es ist aber $WX = r \left[\text{Sin} \left(\frac{R}{r} \beta' - \gamma \right) + 2 \text{ Sin } \frac{1}{2} \gamma \right]$ wenn γ seine vorige Bedeutung hat, und β' der Winkel ABY ist. Nun sei AU $= c$; folglich BU $= R - c$, und es werde mit RU aus B der Kreisbogen QU beschrieben; so wird ein Punkt R in diesem Bogen den Bogen RU durchlaufen, während der Punkt Y den Bogen AY durchlaufen haben wird, und es wird daher ein Punkt Q, der in eben dem Momente, in welchem die Bewegung des Punktes Y anfängt, in der Vertikalebne WDZ sein soll, um den Bogen QR rückwärts liegen müssen. Man sucht den Winkel QBR $= \delta'$. Da hat man Sin QBU $=$ WX : BQ

$$= \frac{r \left[\text{Sin} \left(\frac{R}{r} \beta' - \gamma \right) + 2 \text{ Sin } \frac{1}{2} \gamma \right]}{R - c}$$ woraus

man den Winkel QBU $= \beta' + \delta'$ findet.

41. Soll nun der Kamm in Q eben anzugreifen anfangen, und in P eben auszuwinden beginnen: so muß eine Ebne durch W und I, senkrecht auf die Ebene CDF gesetzt, parallel mit der Ebne DFNZ sein. Folglich muß WX und IL in einer und eben derselben graden und mit DF parallelen Linie liegen; also der Bogen AV $=$ AH, daher

$$\frac{R}{r} \beta' = VG = AV + AG = \frac{R}{r} \beta + 2\gamma$$

sein. Hieraus folgt $\beta' = \beta + 2 \frac{r}{R} \gamma$. So sind durch R, r, e, c, β und γ die Winkel β',

$\frac{R}{r}\beta'$, δ und δ' gegeben. e und ς sind auch nicht ganz willkührlich. Das natürlichste wird sein, sie gleich lang zu nehmen, so daß der Theilungskreis grade durch die Mitte der Breite des Kammes geht. Ueberdieß müssen beide so genommen werden, daß die Winkel δ, δ' nur etwan $\frac{1}{9}$ bis $\frac{1}{10}$ des Bogens einer Theilung zu ihrem Maaße bekommen; weil sonst die Kämme der Breite nach zu sehr zugespitzt werden, und an den Enden leicht absplittern könnten.

42. Nun läßt sich übersehen, wie man darauf kommen könne, so viel feste Punkte zu berechnen, als nöthig sind, um eine Figur für die Kämme zu bestimmen, die von der wahren ihnen zukommenden Gestalt nur so wenig verschieden ist, daß man die Abweichung für unbedeutend achten kann. Ist nämlich die Anzahl der Kämme p, die Anzahl der Stöcke q und der Radius des Kammrades R gegeben; so findet man daraus den Radius des Trillings $r = \frac{qR}{p}$; aus r und q, oder R und p ergiebt sich der einer Theilung zubehörige Bogen. Man beurtheilt hierauf aus dem Verhältnisse p : q, ein wievielter Theil der Theilung für die halbe Dicke des Stockes angenommen werden solle: daraus ergiebt sich γ. Soll der Kamm eben durchgreifen: so ist AL = FI der halben Dicke des Stockes gleich. Dieß von r abgezogen, läßt CL $= r.\text{Cos}\left(\frac{R}{r}\beta + \gamma\right)$. Dieß durch r dividirt,

giebt $\cos\left(\frac{R}{r}\beta + \gamma\right)$. Hieraus hat man den Winkel $\frac{R}{r}\beta$, folglich auch den Winkel β. Gemeinhin macht man die Breite des Kammes UT = c + e der Theilung gleich; soll nun c = e sein; so ist OM die halbe Theilung. Nun ergiebt sich $\sin MBS = \sin(\beta - \delta) = IL : BP$

$$= \frac{r.\left[\sin\left(\frac{R}{r}\beta + \gamma\right) - 2\sin\frac{1}{2}\gamma\right]}{R + e};$$ hieraus hat man $\delta = PBO$, woraus sich die Länge des Bogens PO ergiebt. Ferner hat man nun auch $\frac{R}{r}\beta' = \frac{R}{r}\beta + 2\gamma = GCV$; daraus $\frac{R}{r}\beta' - \gamma$ $= \frac{R}{r}\beta + \gamma = ACV$; und hieraus $WX = r\left(\sin\left(\frac{R}{r}\beta + \gamma\right) + 2\sin\frac{1}{2}\gamma\right)$. Hieraus $\sin QBU = \sin(\beta' + \delta') =$

$$= \frac{r\left(\sin\left(\frac{R}{r}\beta + \gamma\right) + 2\sin\frac{1}{2}\gamma\right)}{R - e}.$$ So ergiebt sich der Winkel $(\beta' + \delta')$. Nun weiß man $ABY = \beta' = \beta + 2\frac{r}{R}\gamma$; folglich auch δ', also auch die Länge des Bogens QR. Endlich kann MS — AF, oder eigentlich KM gesucht werden. MS — AF ist $R\sin\beta - r\left(\sin\left(\frac{R}{r}\beta + \gamma\right)\right.$

$-2\,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\gamma\Big)$; KM ist davon nicht bedeutend verschieden, da der Winkel KMS immer nur sehr klein ist.

43. Für R = 4 Fuß, r = $\frac{9}{16}$ Fuß, und $\gamma = 12°$ hat man Folgendes. Unter der Voraussetzung, daß die Kämme nur eben durch die Stöcke durchgreifen sollten, fand man vorhin $\frac{R}{r}\beta = 25°\,45'$, $\beta = 3°\,37\frac{1}{4}$, MS — IL = 0, 310 Zoll, $\delta = 0°\,31\frac{11}{12}'$, und OP = 0, 469 Zoll. Man hat nun ferner $\frac{R}{r}\beta' = \frac{R}{r}\beta + 2\gamma = 49°\,45'$, $\beta' = \beta + \frac{2r}{R}\gamma = 6°\,59\frac{3}{4}'$. Ist nun c = e = $2\frac{1}{2}$ Zoll; so ist $\mathrm{Sin\,QBU} = \frac{\frac{9}{16}(\mathrm{Sin}\,37°\,45' + 2\,\mathrm{Sin}\,6°)}{\frac{91}{24}}$ = 0, 121 8374; daher QBU = 6° 59′ 53⅓″; δ′ ist daher nur 8 Sekunden, und QR = 0, 001 103 Zoll. Da δ′ hier so ganz unbedeutend klein wird; so könnte man c > e, z. B. 3 Zoll nehmen. Da würde der Divisor statt $\frac{91}{24}$, $\frac{15}{4}$ werden; daraus hätte man Sin QBU = 0, 123 1911, also QBU = 7° 4′ 35″, und δ′ = 4′ 50″; folglich QR = 0, 061 27. Allein der Kamm würde dann schon zu breit.

44. Man könnte nun den Kamm unter der Voraussetzung verzeichnen, daß ein Kreisbogen durch die drei gefundnen festen Punkte wenig von der krummen Linie verschieden sein könnte, welche eigentlich den Durchschnitt des Kammes begränzen sollte. Dabei

wäre etwan folgendermaßen zu verfahren. Die Theilung war hier 4″ 7124, die halbe mittlere Dicke des Kammes ist $\frac{1}{5}$ hiervon, mithin 0″, 9425. Wären die Seitenflächen des Kammes eben, nach der Richtung des Radius gezogen; so wäre seine äußre halbe Breite $= \frac{50,5}{48}$ 0″, 9425 = 0″, 9895, und seine innere halbe Breite $= \frac{45,5}{48}$ 0,″ 9425 = 0″, 8934. Nun sei in Fig. 8. AB die Mittellinie des Kammes und C der Mittelpunkt desselben: so setze man zuerst durch C senkrecht die Linie DE, mache ferner AC = BC = e = $2\frac{1}{2}$ Zoll, und setze senkrecht durch A die Linie FG, und durch B die Linie HI. Macht man nun CD = CE = der halben mittlern Breite des Kammes, weniger MS — IL = 0″, 9425 — 0″, 3100 = 0″, 6325, ferner AF = AG = 0″, 9895 — 0″, 4689 = 0″, 5206, und BH = BI = 0″, 8934 — 0″, 0011 = 0″, 8923: so hat man die festen Punkte FDH und GEI, durch welche man die Kreisbögen FDH und GEI ziehen kann. So ergiebt sich der vordre Durchschnitt des Kammes FHGI. Verlängert man DE in K und L, macht CK = CL = der halben mittlern Breite des Kammes = 0″, 9425, und zieht die Bogen FKH, GLI: so ist FKHGLI ein Durchschnitt, der um die halbe Dicke des Stockes rückwärts liegt.

45. Wie man die Linien, welche die Gestalt des Kammes bestimmen, auch durch Zeichnung finden könne, ergiebt sich sehr leicht aus der Betrachtung der siebenten Figur. Indessen wird man für

die Ausübung wohl immer rechnen müssen, weil man schwerlich einen so großen Maaßstab nehmen kann, daß die gesuchten Linien noch deutlich genug in der Zeichnung ausfallen. Am besten wäre es wohl auch hier ein vor allemal blechne Schablone von dem halben vordern Durchschnitte des Kammes machen zu lassen, diese an die aufgezeichnete Mittellinie des Kammes zu legen, und darnach den Umriß des Kammes aufzuzeichnen. Die konische Verdickung des Kammes nach innen hin würde ein geübter Arbeiter ziemlich sicher aus freier Hand nach dem Augenmaaße machen können. Allenfalls könnte man um die halbe Dicke des Stockes rückwärts einen Kreis über die Kämme aufreißen, die Mittel der Kämme darauf abstechen, aus diesen Mitteln nach beiden Seiten hin die halben Dicken der Kämme auftragen, darnach die Seitenflächen der Kämme erst eben abarbeiten, und dann auftragen, um wie viel sie auf beiden Kanten abgeschmiegt werden müssen. So könnte man dem Augenmaaße sehr zu Hülfe kommen: aber die Arbeit ist mühsam und langweilig.

VI.

Betrachtungen über die Kammradskämme, welche in konische Trillinge eingreifen.

46. Man macht zuweilen die Getriebe konisch, nach dem Gesetze, daß die Axen der Stöcke verlängert in der verlängerten Axe des Kammrades zusammen stoßen würden. Da ist r veränderlich. Gesetzt, man nehme das r, welches in der Ebne DFC Fig. 7. liegt zum Maaße an, und bestimme dieses aus R und dem Verhältnisse der Anzahl der Stöcke und Kämme: so ist r', wovon KM abhängt $r \frac{BE}{AB}$, oder insofern BE nicht bedeutend von BS verschieden ist $r . \mathrm{Cos}\ \beta$. Eben so ist r'', wovon OP abhängt, $= \frac{r . PB\ \mathrm{Cos}\ (\beta - \delta)}{R} = \frac{r (R + e)\ \mathrm{Cos}\ (\beta - \delta)}{R}$

Endlich ist r''', wovon QR abhängt,

$$= \frac{r . BQ\ \mathrm{Cos}\ (\beta' + \delta')}{R} = \frac{r (R - c\ \mathrm{Cos}\ (\beta' + \delta')}{R}.$$

Ferner ändern sich auch noch die Verhältnisse von β zu β', δ zu δ' ab. Es muß nämlich, wenn der Kamm in Q eben anzugreifen anfangen, und in P eben auszuwinden beginnen soll, zwar noch wie vorhin DW = FI sein. Da ist nun r — DW $= r''' \cdot \text{Cos}\, \frac{R}{r}\beta'$, woraus sich ein kleineres β' als vorhin ergiebt. Man wird die Abänderungen im Zusammenhange am bequemsten an folgendem Beispiele ersehen.

47. Es sei, wie vorhin R = 4 Fuß, $r = \frac{9}{16}$ Fuß = $6\frac{3}{4}$ Zoll, $\gamma = 12°$, e = c = $2\frac{1}{2}$ Zoll; so hat man für eben durchgreifende Kämme $r\,\text{Cos}\left(\frac{R}{r}\beta + \gamma\right) = r\,(1 - 2\,\text{Sin}\,\frac{1}{2}\gamma)$: also hier

$$\text{Cos}\left(\frac{R}{r}\beta + \gamma\right) = 0{,}790\,9430,$$ woraus $\frac{R}{r}\beta$ $= 25°\,43'\,37''$, und $\beta = 3°\,37'\,4''$ folgt. MS $= R\,\text{Sin}\,\beta = 3'',0288$. Ferner ist das hierher gehörige

$$LI = r\,\text{Cos}\,\beta\left(\text{Sin}\left(\frac{R}{r}\beta + \gamma\right) - 2\,\text{Sin}\,\frac{1}{2}\gamma\right) = 2'',7138;$$

mithin MS — LI, welches für KM angenommen werden kann, $= 0'',3150$. Das LI, wovon OP abhängt, ist

$$\frac{r\,(R+e)\,\text{Cos}\,(\beta-\delta)\left(\text{Sin}\left(\frac{R}{r}\beta+\gamma\right) - 2\,\text{Sin}\,\frac{1}{2}\gamma\right)}{R}$$

$= 2{,}860\,808\,3\,\text{Cos}\,(\beta - \delta)$, und LI dividirt durch $R + e$ giebt $\text{Sin}\,(\beta - \delta)$. Es ist also $\text{Sin}\,(\beta - \delta)$ $= 0{,}055\,649\,7\,\text{Cos}\,(\beta - \delta)$, oder $\text{tang}\,(\beta - \delta)$

$= 0,056\,649\,7$. Hieraus hat man $\beta - \delta = 3^\circ\, 14'\, 32''$; also $\delta = 0^\circ\, 22'\, 32''$; folglich $OP = (R + e)\, \mathrm{Sin}\, \delta$ $= 0'',3310$. Ferner ist $r''' = \frac{r\,(R - e)\, \mathrm{Cos}\, (\beta' + \delta')}{R}$ $= 6'',398\,4375\, \mathrm{Cos}\, (\beta' + \delta')$, und $WX = 45'',5$ $\mathrm{Sin}\, (\beta' + \delta')$, $VW = 2\,r'''\, \mathrm{Sin}\, \frac{1}{2}\gamma = r'''.0,209\,0570$ $= 1'',337\,638\,1\, \mathrm{Cos}\, (\beta' + \delta')$; also $VX = 45'',5$ $\mathrm{Sin}\, (\beta' + \delta') - 1'',337\,638\,1\, \mathrm{Cos}\, (\beta' + \delta')$. Nun ist $r'''^2 - VX_{qu} = CL_{qu}$; CL war r $(1 - 2\, \mathrm{Sin}\, \frac{1}{2}\gamma) = 5'',338\,8652$: also ist $40'',940\,002$ $\mathrm{Cos}^2\, (\beta' + \delta') - 2070'',25\, \mathrm{Sin}^2\, (\beta' + \delta')$ $+ 121'',725\,067\, \mathrm{Sin}\, (\beta' + \delta')\, \mathrm{Cos}\, (\beta' + \delta')$ $- 1'',789\,276\, \mathrm{Cos}^2\, (\beta' + \delta') = 28'',503\,482$; folglich auch $2098'',753\,482 - 2109'',400\,726\, \mathrm{Cos}^2\, (\beta' + \delta')$ $= 121'',725\,067\, \mathrm{Sin}\, (\beta' + \delta')\, \mathrm{Cos}\, (\beta' + \delta')$ oder $1'' - 1'',005\,073\,1\, \mathrm{Cos}^2\, (\beta' + \delta') = 0'',057\,9987$ $\mathrm{Sin}\, (\beta' + \delta')\, \mathrm{Cos}\, (\beta' + \delta')$. Quadrirt man auf beiden Seiten; so hat man: $1'' - 2'',010\,146\, \mathrm{Cos}^2$ $(\beta' + \delta') + 1'',010\,172\, \mathrm{Cos}^4\, (\beta' + \delta') = 0'',003\,364$ $\mathrm{Sin}^2\, (\beta' + \delta')\, \mathrm{Cos}^2\, (\beta' + \delta')$. Setzt man nun statt $\mathrm{Sin}^2\, (\beta' + \delta')$ den gleichgeltenden Ausdruck 1 $- \mathrm{Cos}^2\, (\beta' + \delta')$ und ordnet die Gleichung nach Cos $(\beta' + \delta')$; so erhält man: $\mathrm{Cos}^4\, (\beta' + \delta') - 1,992\,518$ $\mathrm{Cos}^2\, (\beta' + \delta') + 0,989\,476 = 0$; und daraus Cos $(\beta + \delta) = \pm \sqrt{0,996\,259 \pm \sqrt{(0,996\,259)^2 - 0,989\,476}}$; es ist aber $\sqrt{0,989\,476} = 0,994\,724$, welches von $0,996\,259$ nur um $0,001\,535$ verschieden ist. Da ohnehin die letzten Ziffern hier unsicher sind: so kann man wohl annehmen, daß das, was hier unter dem zweiten Wurzelzeichen steht, sich aufhebe, und also $\mathrm{Cos}\, (\beta' + \delta') = \sqrt{0,996\,259} = 0,99818$ sei; mithin

mithin $\beta' + \delta' = 3^\circ\ 27'$. Allein auch hier sind die letzten Ziffern schon unsicher, und da die Cosinus kleiner Winkel sich nur langsam ändern: so thut man besser, $\beta' + \delta'$ durch seinen Sinus zu suchen. Man hatte vorhin $2098{,}753\,482 - 2109{,}400\,726 \operatorname{Cos}^2 (\beta' + \delta') = 121{,}725\,067 \operatorname{Sin} (\beta' + \delta') \operatorname{Cos} (\beta' + \delta')$. Setzt man nun statt $\operatorname{Cos}^2 (\beta' + \delta')$, $1 - \operatorname{Sin}^2 (\beta' + \delta')$; so hat man $2109{,}400\,726 \operatorname{Sin}^2 (\beta' + \delta') - 10{,}647\,244 = 121{,}725\,067 \operatorname{Sin} (\beta' + \delta') \operatorname{Cos} (\beta' + \delta')$ oder $\operatorname{Sin}^2 (\beta' + \delta') - 0{,}005\,047\,52 = 0{,}057\,706\,00 \operatorname{Sin} (\beta' + \delta') \operatorname{Cos} (\beta' + \delta')$. Dieß auf beiden Seiten quadrirt, giebt $\operatorname{Sin}^4 (\beta' + \delta') - 0{,}010\,095 \operatorname{Sin}^2 (\beta' + \delta') + 0{,}000\,025 = 0{,}003\,329 \operatorname{Cos}^2 (\beta' + \delta') \operatorname{Sin}^2 (\beta' + \delta')$. Drückt man hier wieder das Quadrat des Cosinus durch den Sinus aus: so hat man $1{,}003\,329 \operatorname{Sin}^4 (\beta' + \delta') - 0{,}013\,424 \operatorname{Sin}^2 (\beta' + \delta') + 0{,}000\,025 = 0$; oder $\operatorname{Sin}^4 (\beta' + \delta') - 0{,}013\,370 \operatorname{Sin}^2 (\beta' + \delta') + 0{,}000\,025 = 0$. Hieraus hat man $\operatorname{Sin} (\beta' + \delta') = \sqrt{0{,}006\,685 \pm \sqrt{(0{,}006\,685)^2 - 0{,}000\,025}} = \sqrt{0{,}006\,685 \pm 0{,}004\,3}$. Hieraus hat man für das positive Zeichen $\operatorname{Sin} (\beta' + \delta') = 0{,}105$, und daraus $(\beta' + \delta') = 6^\circ\ 3'$; für das negative Zeichen dagegen $\operatorname{Sin} (\beta' + \delta') = 0{,}041$, und daraus $\beta' + \delta' = 2^\circ\ 23'$. Beide Angaben sind bis auf etwa zwei Minuten sicher; und man sieht hieraus, daß ein Verfahren, mittelst dessen man $(\beta' + \delta')$ durch den Cosinus sucht, so unsicher ist, daß es schlechthin kein brauchbares Resultat giebt. Man übersieht ohngefähr aus der Zeich-

nung, daß β' doch hier größer sein soll, als δ; mithin wird man den Werth für $(\beta' + \delta')$ nehmen, der sich aus den positiven Zeichen ergiebt. r''' war vorhin $6'', 398\,4375$ Cos $(\beta' + \delta')$ also, wenn $\beta' + \delta' = 6°\ 3'$ ist, $6'', 362\,9$. VX war vorhin $45'', 5$ Sin $(\beta' + \delta') - 1'', 337\,6381$ Cos $(\beta' + \delta')$; mithin ist es $3'', 465\,3$. Es ist aber VX : $r''' =$ Sin $\left(\frac{R}{r}\beta' - \gamma\right)$; folglich hier Sin $\left(\frac{R}{r}\beta' - \gamma\right) = 0, 544\,6$, und daher $\frac{R}{r}\beta' = 45°\ 0'\ 0''$. Hieraus folgt $\beta' = 6°\ 19'$. Soll nun $\beta' + \delta' = 6°\ 3'$ sein; so ist δ' verneint, d. i. es fällt auf die andre Seite der Linie BD; dieß verneinte δ' ist $0°\ 16'$. Wollte man aus diesem unerwarteten Resultate folgern, daß man vorhin vielmehr den Werth von $(\beta' + \delta')$ hätte nehmen sollen, der sich aus dem negativen Zeichen ergiebt; so erhielte man Folgendes. Für $(\beta' + \delta') = 2°\ 23'$ wird $r''' = 6'', 392\,9$; VX $= 0'', 555\,6$; Sin $\left(\frac{R}{r}\beta' - \gamma\right) = 0, 086\,9$; folglich $\left(\frac{R}{r}\beta' - \gamma\right) = 4°\ 59'\ 8''$; also $\frac{R}{r}\beta'$ verneint. Es fiele also V auf die andre Seite der Vertikalebne BAC, welches ganz den hier vorausgesetzten Bedingungen entgegen ist. Man ist daher genöthigt bei der vorigen Annahme zu bleiben. Aus $\delta' = 0°\ 16'$ hat man QR, wel-

ches aber hier so zu nehmen ist, daß Q zwischen R und N fällt = 0″ 2197.

48. Man hat also unter übrigens gleichen Voraussetzungen gefunden:

für cylindrische Getriebe	OP	=	+ 0, 4689
	KM	=	+ 0, 3100
	QR	=	+ 0, 0011
für konische Getriebe	OP	=	+ 0, 3310
	KM	=	+ 0, 3150
	QR	=	— 0, 2190

Der Kamm fällt im letztern Falle in der obern Hälfte zwischen OP und KM viel flacher, als im erstern. Das erklärt eine Verschiedenheit in den Konstruktionen, welche bei unsern Müllern gebräuchlich sind. Man findet nämlich in dem größten Theile von Preußen noch sogenanntes deutsches Zeug. In diesem haben die Kämme ebne Seitenflächen ohne alle Erhöhung, und die Getriebe sind gemeinhin konisch. Man sieht, daß in dem vorigen Falle bei konischen Getrieben nur $\frac{1}{5}$ Zoll, welches hier beiläufig $\frac{1}{14}$ der Theilung wäre, Spielraum zwischen Kamm und Stock erfordert würde, um einen ganz ebnen Kamm ohne Klemmen zwischen den Stöcken gehen zu lassen. Soviel Spielraum, als hier gefordert wird, und mehr, giebt man den Kämmen bei dem Verschirren, und er vergrößert sich in Kurzem noch beträchtlich durch die schnelle Abnutzung der Getriebstöcke. Es können daher bei dem gewöhnlichen Verfahren Kämme mit ebnen Seitenflächen recht gut in konischen Getrieben gehen. Aber bei

weitem schlechter gehen sie in cylindrischen Getrieben, weil dafür die Krümmung des Kammes in der obern Hälfte weit beträchtlicher ausfällt, und daher die Abweichung des ebnen Kammes von der eigentlich für ihn gehörigen Form schon sehr merklich wird. Daher ist in den Gegenden, wo die deutsche Verschirrung allgemein üblich ist, auch der Glaube ganz allgemein, daß kein Kammrad ohne Klemmen auswinden könne, wenn das Getriebe nicht konisch sei. Indeß macht man von Tage zu Tage seltner konische Getriebe, weil sie mühsamer zusammen zu setzen sind, als die cylindrischen. Auch ist es in der That schwer sie eben so fest zu machen. Theils lassen sich nicht füglich die Zapflöcher für die Stöcke unter dem erforderlichen Winkel bohren: man muß daher bei dem Einsetzen nachhelfen; dadurch werden die Löcher leicht zu weit. Man hilft sich nun wohl durch das Verkeilen; indessen entsteht doch immer daraus eine Flickerei, die man bey cylindrischen Getrieben nicht nöthig hat. Theils werden auch häufig bei kleinen konischen Getrieben, und schwachen Theilungen die untern Scheiben zu klein, und deswegen leicht wandelbar. Je mehr aus diesen Gründen die cylindrischen Getriebe gebräuchlich werden, desto mehr muß man anfangen sich an das sogenannte holländische Zeug zu gewöhnen. In diesem haben die Kämme convexe Seitenflächen, welche durch Kreisbögen begränzt werden, deren Mittelpunkte in der Mitte der zu beiden Seiten nächst anliegenden Kämme sich befinden. Dem zu Folge fallen unter übrigens gleichen Umständen die Kämme desto schmäler an der äußern

Kante, je kleiner das Kammrad ist. Das ist der Natur der Sache auch ganz angemessen; und die holländisch verschirrten Kammräder gehen recht gut an cylindrischen Getrieben, welche 15 oder mehr Stöcke haben. In kleinern Getrieben scheinen sie sich doch zu klemmen: man könnte das indessen leicht vermeiden, wenn man die Mittelpunkte der Kreisbögen, wornach die Seiten der Kämme abgerundet werden, zwar noch in den Mittellinien der beiden nächstanliegenden Kämme, aber nicht in dem Durchschnitte dieser Linien mit dem Theilkreise, sondern etwas mehr gegen die innre Seite des Reifens, annähme. Man wird es vielleicht immer zu mühsam finden, die Kämme der Kammräder nach der oben angegebnen Methode zu verzeichnen: aber man sollte wenigstens allezeit die holländische Verschirrung der deutschen vorziehen, weil sie dauerhaftere und leichter anzufertigende Getriebe zuläßt.

49. Es giebt einen Fall, in welchem man auch bei holländischem Zeuge konische Getriebe braucht. Man verschirrt nämlich zuweilen die Kammräder doppelt; das ist, man setzt innerhalb des ersten Kreises von Kämmen noch einen andern concentrisch mit ihm. Nothwendig hat dieser innre Kreis von Kämmen eine kleinere Theilung, als der äußre, weil er bei einer gleichen Anzahl Kämme einen kleinern Radius hat. Der Trilling muß daher an der Stelle, wo diese innre Reihe Kämme an ihn greift, auch eine kleinere Theilung haben. Das kann aber nicht anders geschehen, als wenn er ein Stück eines Kegels ist, dessen Spitze in der Axe der Kammradswelle liegt.

50. Man verschirrt doppelt, weil dadurch die Wirkung der Kraft auf mehrere Punkte vertheilt wird, und mithin die Kämme und Stöcke an jedem einzelnen Punkte um so weniger abgenutzt werden. Wäre der Nutzen einer solchen Vertheilung allgemein und unbedingt klar: so würde folgen, daß eine dreifache Verschirrung noch besser wäre, als eine doppelte, eine vierfache noch besser, als eine dreifache u. s. w. Dieser Schluß führt offenbar auf Absurditäten. Der Nutzen solcher doppelten Verschirrungen wird wenigstens äußerst zweifelhaft, wenn man folgende Umstände in Erwägung zieht. Es ist unleugbar, daß unter übrigens gleichen Umständen die Reibung wächst, wenn die Flächen, welche sich reiben, vergrößert werden: nothwendig muß daher an Rädern, welche doppelt verschirrt sind, die Reibung zwischen den Stöcken und Kämmen größer sein, als an einfach verschirrten Rädern. Ein doppelt verschirrtes Kammrad ist beträchtlich schwerer, als ein einfach verschirrtes, weil der Reifen beträchtlich breiter werden muß. Ein Kammrad von 4 Fuß Radius mit $4\frac{3}{4}$ Zoll Theilung ist gewöhnlich bei einfacher Verschirrung im Reifen $9\frac{1}{2}$ breit, und eben so dick. Der Reifen enthält demnach $(4^2 - 3\frac{5}{24}{}^2)$ $\pi, \frac{19}{24} = 14, 2$ Cbf. Eichenholz, und wiegt also, den rhein. Cbf. trocknes Eichenholz nur zu 48 berl. Pfunden gerechnet, 682 Pfund. Bei doppelter Verschirrung muß der Reifen wenigstens 15 Zoll breit sein: mithin enthält er $(4^2 - 2\frac{3}{4}{}^2)\ \frac{19}{24}\ \pi = 21$ Cbf. Eichenholz, und wiegt daher 1008 Pfund; das ist 326 Pfund mehr als der vorige. Diese Schwere giebt eine nicht ganz unbeträchtliche

Vermehrung der Reibung in den Zapfen der Kammradswelle, zumal wenn diese, wie gewöhnlich, horizontal liegt. Hierzu kommt, daß dieß schwerere Rad auch in Rücksicht auf seine Schwungkraft weniger leistet, als das einfach verschirrte, weil der Schwerpunkt des breitern Reifens näher gegen die Axe der Welle hinliegt, und mithin langsamer umläuft. Endlich ist nicht nur die Ausarbeitung eines solchen doppelt verschirrten Rades bei weitem mühsamer; sondern es ist auch weit schwerer Rad und Trilling so einzustellen, daß die Kämme an dem gehörigen Orte eingreifen. Es ist nämlich ziemlich gleichgültig, wie hoch oder wie niedrig ein Trilling mit cylindrischen Stöcken stehe, weil alle seine Durchmesser gleich sind: aber ein konischer Trilling hat eine ganz bestimmte Lage; er muß nämlich so aufgekeilt sein, daß jeder Durchschnitt das $\frac{r}{R}$ fache des Kreises in der Ebne des Kammrades sei, welcher ihn in der Vertikalfläche berührt, die durch die Axen der Wellen beider Räder geht. Gesetzt nun, ein verständiger Mühlenbaumeister habe auch wirklich dem Trillinge diese Stellung ganz genau geben lassen: so bleibt sie doch nicht unveränderlich. Das Kammrad senkt sich, so wie es sich tiefer in seine Zapflager einmählt; und man darf gemeinen Arbeitern nicht zutrauen, daß sie Aufmerksamkeit genug besitzen werden, die Kammradswelle in dem Maaße höher aufzukeilen, in welchem sie sich durch die Abnutzung der Zapfenlager senkt.

51. Man könnte vielleicht einwenden, daß einfache Verschirrungen nicht dauerhaft genug wären,

und man daher genöthigt sei die doppelten zu wählen, um die Versäumniß und Kosten häufiger Reparaturen zu vermeiden. Das ist indeß, wenigstens in Wassermühlen, gegen alle Erfahrung. Einfach verschirrte Kammräder mit nicht mehr als $4\frac{1}{2}$ Zoll Theilung, welche mittelst eines stehenden Vorgeleges zwei Graupengänge mit fünffüßigen Steinen in Umlauf setzten, und jährlich wenigstens 40 Wochen unausgesetzt im Gange waren, hielten drei Jahre aus, ehe sie von neuem verschirrt zu werden brauchten. Man hat mir, als ein Beispiel des Gegentheils, doppelt verschirrte Kammräder gezeigt, welche durch ein stehendes Vorgelege zwei Mahlgänge treiben, und sechzehn Jahre mit einerlei Verschirrung ausgehalten haben. Das scheint in der That auffallend. Die Mühle, worin diese Kammräder sich befinden, steht in der Regel 22 Wochen jährlich wegen Wassermangel: während der übrigen Zeit sind im Durchschnitte nur zwei Gänge von sechsen abwechselnd in Arbeit. Mithin geht jedes Kammrad jährlich nur zehn Wochen. Diese doppelt verschirrten Räder haben also in 16 Jahren 160 Wochen gearbeitet; jene einfach verschirrten in drei Jahren 120 Wochen. Bringt man nun noch in Anschlag, daß die erstern ein weit leichteres Werk treiben, nämlich nur zwei Läufer von $3\frac{1}{2}$ Fuß im Durchmesser: dagegen die letztern zwei fünffußige Steine und überdieß ein schweres Sieb und eine Windharfe in einer weit schnellern Bewegung erhalten müssen; daß ferner jene durch hohe oberschlächtige Räder, welche bekanntlich sehr gleichförmig gehen, diese aber durch Pansterzeug getrieben werden, wel-

ches wegen des unsichern Einrückens der Trillinge in das Stirnrad auf der Wasserradswelle oft beträchtlichen Stößen und einem ungleichen Gange ausgesetzt ist, so verschwindet die scheinbar so sehr viel größere Dauerhaftigkeit der doppelten Verschirrung fast gänzlich. Ich habe absichtlich hier so ausführlich alle Umstände verglichen, weil dieß Beispiel recht einleuchtend zeigt, wie viel Behutsamkeit und Kenntniß des Lokals nöthig sei, um aus Erfahrungen sichre Resultate zu ziehen. Es wird Vieles als Erfahrung mit großem Geräusche aufgestellt, hundertfältig allegirt und nachgeschrieben, welches ähnlichen Einwendungen ausgesetzt ist.

52. In Windmühlen ist der Fall zum Theil anders. Hier erfordert das Kammrad an der Ruthenwelle ohnehin einen konischen Trilling, falls man nicht lieber statt desselben einen Bunkler, das ist ein horizontalliegendes Kammrad, wählen will. Die Ruthenwelle ist oft äußerst heftigen Stößen ausgesetzt, wenn der Wind sich plötzlich umsetzt, oder kreiselt und wirbelt, statt gleichförmig zu strömen. Hier kann eine Verdoppelung der Kämme nützlich werden, um dieselben in solchen kritischen Augenblicken gegen das Zerbrechen zu schützen; und dieser Nutzen kann die Nachtheile überwiegen, welche der doppelten Verschirrung den vorhergehenden Betrachtungen gemäß eigen zu sein scheinen.

53. Da der konische Trilling an seinem der Axe des Kammrades zugekehrten Ende einen kleinern Radius hat; so wird sein Theilungskreis daselbst entfernter von der Ebne des Kammrades sein, wenn diese rechtwinklicht gegen die Ebne des Tril-

lings liegt. Welchen Einfluß diese Betrachtung auf die Länge der Kämme bei einer doppelten Verschirrung haben könne, wird folgendes Beispiel zeigen. Gesetzt, es sei das ofterwähnte Kammrad von 4 Fuß im Radius des äußern Theilungskreises doppelt verschirrt: so wird bei 64 Kämmen, und mithin 4, 7124 Zoll Theilung, der Radius des innern Theilungskreises wenigstens um 6 Zoll kleiner sein, und sich daher die Radien der beiden Theilungskreise wie 8 : 7 verhalten. Eben so müssen sich nun auch die Radien der zubehörigen Theilungskreise des Trillings verhalten. Ist daher der Radius des größern von diesen Kreisen $= \frac{9}{16}$ Fuß $= \frac{27}{4}$ Zoll; so ist der Radius des kleinern $= \frac{27 \cdot 7}{8 \cdot 4}$ $= \frac{189}{32}$ Zoll, mithin um $\frac{27}{32}$ Zolle kleiner. Ist nun die Ebne des Reifens des Kammrades von dem Theilungskreise des Trillings, der zu der äußern Reihe Kämme gehört um drei Zolle entfernt, so ist sie von dem Theilungskreise des Trillings, der zu der innern Reihe Kämme gehört, um $3\frac{27}{32}$ Zoll entlegen. Man erhält die Länge des Kammes, wenn man zu diesen Distanzen $2r \operatorname{Sin} \frac{1}{2}\gamma$ addirt. γ war hier $12°$; mithin $2r \operatorname{Sin} \frac{1}{2}\gamma$ im ersten Falle $= 1,411\,134\,7$, im andern $= 1,221\,676\,8$. Es ist demnach der äußre Kamm lang $4'', 411\,1347$, der innere dagegen $5'', 065\,426\,8$, mithin um $0, 654\,2921$ oder beiläufig um $\frac{2}{3}$ Zoll länger. Gemeinhin machen die Mühlenärzte die Kämme in beiden Reihen gleich lang; daraus folgt, daß die innere Reihe sehr wenig eingreifen kann, wenn, wie es in Wassermühlen in der Regel der Fall ist, die Kammrä-

der völlig vertikal, und die Trillinge genau horizontal stehen. Hieraus folgt um so mehr, daß daselbst die mühsame doppelte Verschirrung etwas sehr Ueberflüssiges ist.

54. Bei Windmühlen ist in Rücksicht des Kammrades auf der Ruthenwelle der Fall anders zu beurtheilen. Die stehende Welle ist nämlich da genau vertikal, die Ruthenwelle dagegen gegen den Horizont geneigt. Es sei daselbst R der Radius des äußern Theilungskreises im Kammrade, R — a der Radius des innern Theilungskreises, λ der Winkel, welchen die Ruthenwelle mit der Horizontalebne macht, r der Radius des Theilungskreises des Trillings, der zu R gehört, und r — b der Radius des Theilungskreises des Trillings, der zu R — a gehört. So ist $R : r = R - a : r - b = a : b$; also $b = \frac{r\,a}{R}$ Nun sei die Entfernung der Ebne des Reifens des Kammrades von dem Theilungskreise, dessen Radius r ist, = c. Dagegen ist die Entfernung derselben Ebne von dem Theilungskreise, dessen Radius = r — b ist, so groß als c $+ \frac{2 \text{ Sin } \frac{1}{2}\gamma \text{ Cos.}\lambda.r.a}{R}$, wenn die Kämme der innern Reihe so lang sein sollen, als die Kämme der äußern. Hieraus folgt die lothrechte Entfernung der Ebnen beider Theilungskreise des Trillings

$$= a \text{ Cos } \lambda \left(1 - \frac{2 \text{ Sin } \lambda \text{ Sin } \frac{1}{2}\gamma . r}{R} \right) = e;$$

wo alsdann r, e und b die Gestalt des Trillings bestimmen. Es läßt sich daher in diesem Falle al-

lemal ein Trilling angeben, der so beschaffen ist, daß beide Reihen Kammradskämme eben durchgreifen, wenn die Kämme in ihnen gleich lang sind. Es sei z. B. R hier $6\frac{1}{2}$ Fuß; das große Kammrad enthält 96 Kämme, woraus die hier ganz schickliche Theilung von 5, 1051 Zoll folgt. Ferner habe der Trilling 25 Stöcke, woraus $r = 20\frac{5}{16}$ Zoll gefunden wird. Die Welle sei vom hintern Zapfen bis zum Anfange des Halses 16 Fuß lang, und ihre Axe liege am Halse 2 Fuß höher als der Mittelpunkt des hintern Zapflagers: so ist $\mathrm{Sin}\,\lambda = \frac{1}{8}$ folglich $\lambda = 7^\circ\, 10'\, 51''$. Endlich sei $a = 7\frac{1}{2}$ Zoll.

So ist $b = \dfrac{20\frac{5}{16} \cdot 7\frac{1}{2}}{78} = \frac{125}{64}$ Zoll: folglich der Radius des kleinern Theilungskreises des Trillings $= 18\frac{23}{64}$ Zoll. Die Dicke des Stockes sei hier $\frac{4}{7}$ der Theilung: so ist $\gamma = 4^\circ\, 6\frac{6}{7}'$, also $\frac{1}{2}\gamma = 2^\circ\, 3\frac{3}{7}'$. Hieraus hat man $e = a\ \mathrm{Cos}\,\lambda$ $\left(1 - \dfrac{2\ \mathrm{Sin}\,\lambda\ \mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\gamma . r}{R}\right) = 7,441\,175$ $(1 - 0,002\,337) = 7'', 423\,785$. Es ist demnach $a - e = 0,076\,215$ Zoll; dieß ist so unbedeutend, daß man es in der Ausübung allemal wird bei Seite setzen, und $a = e$ machen können. Was etwan sich hierin bei verschiednen Windmühlen abändern wird, kann keinen bedeutenden Einfluß auf das gefundne Resultat haben; denn für die einmal bekannte Bauart der holländischen Windmühlen können die Data immer nur wenig von den hier angenommnen verschieden sein. Hieraus folgt denn nun, daß in den doppelt verschirrten Kammrädern

holländischer Windmühlen beide Reihen Kämme bei gleicher Länge eben zwischen den Stöcken durchgreifen werden, wenn man den konischen Trillingen dieselbe Gestalt giebt, die sie erhalten müßten, wenn die Ruthenwelle vollkommen horizontal wäre, und die Spitze des Kegels, wovon sie ein abgekürztes Stück sind, in der Axe der Ruthenwelle liegen sollte.

55. So wird es leicht die Größe der Trillingsscheiben und ihr Verhältniß gegen einander zu berechnen. Die obere oder innere Fläche der untern Scheibe muß ohngefähr so tief, als die Theilung lang ist, unter der Ebne des größern Theilungskreises liegen; die untre oder innre Fläche der obern Scheibe etwan um $1\frac{1}{4}$ Theilungen über der Ebne des kleinern Theilungskreises. Die Theilung sei t, die Dicke der Scheiben d; so ist überhaupt die Höhe des Trillings $= 2d + \frac{9}{4}t + a$, und es verhalten sich die Durchmesser beider Scheiben wie $R + t + d : R - (a + \frac{5}{4}t + d)$. Braucht man hier z. B. vierzollige Scheiben: so ist die Höhe des Trillings $= 2.4 + \frac{9}{4}.5{,}1051 + 7\frac{1}{2} = 26{,}9865$ Zoll, wofür man unbedenklich volle 27 Zolle annehmen kann; und es verhalten sich die Radien beider Scheiben wie $87{,}1051 : 60{,}1161$, das ist sehr nahe wie $100 : 69$. Es kommt nun darauf an, die Größe des Radius der größern Scheibe zu suchen. Sie sei x; so ist $R : R + t + d = r + \frac{2}{7}t : x$; folglich $x = \frac{(r + \frac{2}{7}t)\,(R + t + d)}{R}$,

das ist in dem gegenwärtigen Falle

$$\frac{(20,3125 + 1,4586)(78 + 9,1051)}{78} = 24,3125$$

Zoll. Demnach ist der Radius der obern Scheibe $= 0,243125 \cdot 69 = 16,7756$ Zoll: oder man hat hier den Durchmesser der untern Scheibe = 4 Fuß und $\frac{5}{8}$ Zoll, den Durchmesser der obern aber 2 Fuß $9\frac{35}{64}$ Zoll zu nehmen. Was man hier gefunden hat, ist eigentlich der untre Durchmesser der untern Schebe und der obre Durchmesser der obern. Da aber der Trilling konisch ist: so ist der obre Durchmesser der untern Scheibe kleiner, und der untre Durchmesser der obern Scheibe größer, als das hier Gefundne, und da die Dicke der Scheiben keinesweges etwas unbeträchtliches gegen die Höhe des ganzen Trillings ist: so werden auch die Durchmesser beider Seitenflächen der Scheiben nicht um etwas ganz unbedeutendes verschieden sein. Es ist nämlich die Höhe des ganzen Kegels, dessen abgekürztes Stück der Trilling ist, $= R + t + d = 87'', 1051$. Nun verhält sich der Durchmesser der untern Fläche der untern Scheibe zu dem Durchmesser der obern Fläche derselben Scheibe, wie $87'', 1051 : 83, 1051$; er ist mithin $= 46'', 3921$ oder beinahe 3 Fuß $10\frac{25}{64}$ Zoll. Ferner verhält sich der Durchmesser der obern Fläche der obern Scheibe zum Durchmesser der untern Fläche derselben Scheibe, wie $60, 1051 : 64, 1051$; er ist daher $35'', 7841$ oder fast 2 Fuß $11\frac{25}{32}$ Zoll. Man wird Scheiben von dieser Größe sehr bequem aus vier Stücken zusammenzapfen können. Die Durch-

messer der Stöcke an beiden Enden verhalten sich, wie die Durchmesser der Scheiben, welche sie berühren. Hier hat der Stock am untern Ende 3″, 1081 oder fast $3\frac{7}{64}$ Zoll, und am obern Ende 2″, 3975 oder $2\frac{25}{64}$ Zoll im Durchmesser.

VII.

Untersuchungen über die Queerschnitte der Trillingsstöcke, insofern deren Figur Einfluß auf das Auswinden der Kammradskämme hat.

56. Es hat sich in der 7ten Figur der Mittelpunkt des Stockes H um einen Bogen des Theilungskreises Hα weiter bewegt, welchem am Mittelpunkte der Winkel HCα $= \frac{R}{r}\varepsilon$ zugehört: so wird in eben der Zeit der Punkt P um einen Bogen des Kreises um die äußern Enden der Kämme Pβ fortgerückt sein, welchem am Mittelpunkte der Winkel PBβ $= \varepsilon$ zugehört. Der Abstand des Punktes α von der Vertikalebne BAC ist r Sin ACα, und der Abstand desselben Punktes von der Ebne DFB ist r (1 — Cos ACα). Es ist aber ACα $= \gamma + \frac{R}{r}\beta + \frac{R}{r}\varepsilon$. Ferner ist des Punktes β Abstand von der Vertikalebne BAC $=$ (R + e) Sin TBβ $=$ (R + e) Sin ($\beta + \varepsilon - \delta$), und sein Abstand von

von der Vertikalebne DFB gegen α hin $= 2\,r\,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\gamma$, unter der Voraussetzung nämlich, daß die Kämme eben zwischen den Stöcken durchgreifen. Sind die Stöcke parallel und cylindrisch: so ist eine Ebne, die parallel mit der Ebne des Kammrades durch die Axe des Stockes in α gelegt wird, von einer andern mit ihr parallelen Ebne, welche durch das äußerste Ende des Kammes in β gelegt wird, entfernt um $r\left[1 - \mathrm{Cos}\left(\frac{R}{r}(\beta+\varepsilon)+\gamma\right) - 2\,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\gamma\right]$; und eine Ebne, welche parallel mit der Ebne BAC durch die Axe des Stockes in α gelegt wird, von einer mit ihr parallelen Ebne, welche durch β gelegt wird, entfernt um $(R+e)\,\mathrm{Sin}\,(\beta+\varepsilon-\delta) - r\,\mathrm{Sin}\left(\frac{R}{r}(\beta+\varepsilon)+\gamma\right)$. Beide Entfernungen sind lothrecht auf einander, und können als Catheten eines rechtwinklichen Dreiecks angesehen werden, dessen Hypothenuse die Entfernung des Stokkes von dem Punkte β ist, welche hier ω heißen mag. Da unter der Voraussetzung, daß die Stöcke eben durchgreifen sollen, β und δ durch γ, R, r gegeben ist: so kann man ω finden, wenn man ε, γ, R, r weiß. Aus eben den Datis ergiebt sich auch der Winkel, den ω an einer Ebne macht, die mit BAC parallel ist, und welche hier η heißen mag. Mit eben derselben Ebne macht eine Tangente an α den Winkel $(\mathrm{Rect} - AC\alpha) = \left(\mathrm{Rect} - \frac{R}{r}(\beta+\varepsilon) - \gamma\right)$. Nun könnte man die

Tangente an α als einen Schenkel eines Winkels ansehen, dessen andrer Schenkel ω wäre. Dieser Winkel ist η + Rect — $\left(\frac{R}{r}(\beta + \varepsilon) + \gamma\right)$. So wären die verschiednen ω, welche für einerlei R, r und γ den verschiednen ε angehören, Ordinaten aus dem Punkte α, deren Länge und Winkelabstand von einem an α gezognen Radius, dessen Lage in Rücksicht auf den Stock unveränderlich bleibt, gegeben wäre. Mittelst solcher Ordinaten ist der Queerdurchschnitt bestimmt, welchen die Stöcke haben müßten, wenn der Punkt P im Auswinden an ihrer Oberfläche hinstreifen sollte. Es ist kein Nutzen davon abzusehen, daß man ihnen gerade einen solchen Queerdurchschnitt gebe, aber es folgt aus diesen Betrachtungen, daß sie keinen Queerdurchschnitt haben können, der Punkte ausserhalb des hier gefundnen hat, weil sonsten P im Auswinden sich klemmen würde; dagegen können sie jeden zum Verzeichnen und Ausarbeiten bequemen Durchschnitt haben, der ganz innerhalb des Gefundnen liegt.

57. Man würde sich in äußerst weitläuftige Formeln verwickeln, wenn man einen allgemeinen Ausdruck für ω und den zubehörigen Winkel suchen wollte. Es sei daher genug, hier noch im Allgemeinen den Gang der Rechnung zu zeigen, wenn man für eben durchgreifende Kämme R, r, γ und ε hat. Es ist nämlich alsdann Cos $\left(\frac{R}{r}\beta + \gamma\right)$

$= 1 - 2 \, \mathrm{Sin} \, \frac{1}{2}\gamma$; hieraus hat man den Winkel $\frac{R}{r} \beta + \gamma$ und also auch $\frac{R}{r} (\beta + \varepsilon) + \gamma$; 1 $- \mathrm{Cos} \left(\frac{R}{r} (\beta + \varepsilon) + \gamma \right) - 2 \, \mathrm{Sin} \, \frac{1}{2}\gamma$ mult. mit r ist die eine der beiden Catheten, die ω bestimmen. Ferner ist $\mathrm{Sin} \, (\beta - \delta) =$

$$= \frac{r \cdot \left[\mathrm{Sin} \left(\frac{R}{r} \beta + \gamma \right) - 2 \, \mathrm{Sin} \, \frac{1}{2}\gamma \right]}{R + e}$$

; hieraus hat man $(\beta - \delta)$, folglich auch $\beta + \varepsilon - \delta$, woraus man die andere Cathete finden kann. Nun ist ω^2 gleich der Summe der Quadrate beider Catheten, und $\mathrm{tang} \, \eta =$

$$= \frac{(R + e) \, \mathrm{Sin} \, (\beta + \varepsilon - \delta) - r \, \mathrm{Sin} \left(\frac{R}{r} (\beta + \varepsilon) + \gamma \right)}{r \left[1 - \mathrm{Cos} \left(\frac{R}{r} (\beta + \varepsilon) + \gamma \right) - 2 \, \mathrm{Sin} \, \frac{1}{2}\gamma \right]}$$

woraus man η und daraus den zu ω behörigen Winkel $= \mathrm{Rect} + \eta - \left(\frac{R}{r} (\beta + \varepsilon) + \gamma \right)$ findet.

58. Es wäre sehr mühsam, auf diesem Wege viele Ordinaten nebst den zubehörigen Winkeln zu berechnen: glücklicherweise wird man sich bald überzeugen können, daß es nur selten nöthig sein dürfte die Rechnung wirklich anzustellen. Gewöhnlich ist der Durchmesser der Trillinge sehr viel kleiner, als der Durchmesser der Kammräder. Da wächst nun der Winkel $\frac{R}{r} \varepsilon$ um ein Beträchtliches, wenn der Winkel ε selbst nur um eine Kleinigkeit zu-

nimmt. Es wachsen also auch die Sinus-Versus von $\frac{R}{r}\varepsilon$ schnell; das ist der Punkt α entfernt sich geschwind von der Ebne, in welcher die äußersten Enden der Kämme umgehen. Ferner rückt der Punkt β viel schneller von der Ebne ab, welche durch BAC gelegt wird, als der Punkt α, weil nämlich der nfache Sinus sehr viel größer ist, als der Sinus des nfachen Winkels, wenn n, welches hier $\frac{R}{r}$ ist, eine große Zahl bedeutet. Die beiden Catheten, deren Hypothenuse ω ist, wachsen also beständig, und zwar um desto schneller, je größer $\frac{R}{r}$ ist. Sollte der Queerdurchschnitt des Stockes ein Kreis sein; so müßte ω beständig einerlei Größe behalten, weil es der Radius dieses Kreises ist. Da aber ω auch beständig wächst, weil die zubehörigen Catheten beständig wachsen, so folgt daraus, daß ein Kreis aus α mit $2r \operatorname{Sin} \frac{1}{2}\gamma$ beschrieben, allemal ganz innerhalb dem möglichstgrößten Queerdurchschnitte des Stockes fallen werde, oder daß man kein Klemmen zu besorgen habe, wenn die Stöcke nur cylindrisch sind; vorausgesetzt nämlich, daß R beträchtlich größer als r sei, wie es in allen gewöhnlichen Fällen der Ausübung immer der Fall sein wird. Alles, was hier von cylindrischen Stöcken gesagt ist, gilt offenbar in noch weit höherm Grade von solchen, die nach den eben angezeigten Gesetzen konisch geformt sind: man wird also auch für diese kein Klemmen beim Auswinden befürchten dürfen. Mithin wird sich die ganze Untersuchung

nur auf solche Fälle beziehen, in welchen man statt der Trillinge Bunkler oder kleine Kammräder braucht, die statt der Stöcke nach einem flächeren Bogenstücke an den Seiten abgerundete Kämme haben; und auch hier würde es genug sein, sich in einigen Fällen, wo R etwan nur 2 r oder wenig mehr wäre, von der Form des Bunklerkammes durch eine förmliche Untersuchung zu unterrichten, um nachher in allen Fällen, wo R > 2 r ist, ohne weitre Besorgniß mit Sicherheit verfahren zu können: denn die gemeinübliche Verzeichnungsart giebt diese Kämme nach desto erhabneren Bogenstücken gekrümmt, je kleiner r gegen die Theilung ist.

VIII.

Ueber die Stärke der Stöcke und Kämme.

60. Vielleicht ist keine Untersuchung in der Baukunst schwieriger, als die über die Haltbarkeit der Materialien. Solange die Beschaffenheit derselben in verschiednen Gegenden so äußerst verschieden ist: so lange selbst in ähnlichen Massen, z. B. in einerlei Holzart, so mannigfaltige Abänderungen obwalten: so lange werden selbst gehäufte und wiederholte Versuche nichts scharf Bestimmtes und allgemein Sichres ergeben. Es ist mir nach wiederholten Vergleichungen kein Zweifel mehr übrig, daß die harten Laubhölzer in milderen Gegenden einen beträchtlich höheren Grad von Festigkeit erreichen, als unter dem rauheren nordlichen Himmel. Daher ist es sehr natürlich, daß die Rheingegenden sich kleinerer Theilungen bedienen können, als das nordliche Deutschland und Preußen. Das Wenige, was ich hier über die erforderliche Größe der Theilungen beibringen kann, wird also blos lokal und der Gegend angemessen sein, welche ich jetzt bewohne.

61. Man hält hier ziemlich allgemein eine Theilung von 4 bis $4\frac{1}{2}$ Zoll hinlänglich für ein Werk, welches einen Mahlgang treibt. Ich habe indessen auch Stirnräder gesehen, welche zwei Graupengänge in Bewegung setzten, und doch nur $3\frac{1}{2}$ Zoll Theilung hatten. Allein es war offenbar, daß diese Theilung zu schwach war. Die Getriebe, welche 16 bis 18 Stöcke hatten, hielten bei Tag und Nacht hindurch fortgesetzter Arbeit nicht über ein halbes Jahr aus; und die Stirnräder von 92 bis 104 Kämmen mußten wenigstens alle zwei Jahre ganz neu verschirrt werden. Hierzu kamen einzelne häufige Beschädigungen bei der geringsten Vernachläßigung der Arbeiter. Andrerseits habe ich auch wieder Stirnräder von fünf Zoll Theilung beobachtet, welche auf einer Wasserradswelle steckten, und zu beiden Seiten in Trillinge griffen, durch welche zwei sehr starke Mahlgänge in Bewegung gesetzt wurden, die in unausgesetztem Betriebe waren. Obgleich diese Stirnräder noch durch das ungleichförmige Einrücken, welches bei Pansterzeuge nach der jetzigen Einrichtung unvermeidlich ist, nicht wenig leiden mußten, auch die Kämme nur vier Zoll breit waren; so hielten sie doch über sieben Jahre unverschirrt aus, und bei manchen war selbst am Ende dieses Zeitraums bei weitem noch keine Verschirrung nöthig. Diese und mehrere ähnliche und verschieden modificirte Erfahrungen scheinen die Annahme zu rechtfertigen, daß Stirnräder mit fünf Zoll breiten Kämmen, welche weiter keiner andern Abnutzung oder Erschütterung ausgesetzt sind, als derjenigen, welche durch die Reibung wohl eingerichteter und

sorgfältig unterhaltner Stöcke hervorgebracht wird, einer Theilung von $4\frac{1}{2}$ Zoll bedürfen, wenn sie zwei Mahlgänge zu treiben haben. Nimmt man ferner an, daß die Stärke ähnlich konstruirter Kämme sich verhalte, wie die Cubi der Theilung: so hat man für Stirnräder, welche einen Mahlgang treiben, $3\frac{1}{2}$, welche drei Gänge treiben, $5\frac{1}{7}$ und welche vier Gänge treiben $5\frac{2}{3}$ Zoll Theilung.

62. Aber Kammräder bedürfen einer stärkern Theilung, weil sie wegen der gekrümmten Seitenfläche des Kammes nur immer mit einem Punkte, nicht aber, wie die Stirnräder, mit einer ziemlich breiten Fläche arbeiten. Durch mehrere Erfahrungen halte ich mich berechtigt anzunehmen, daß ein Kammrad, welches einen Mahlgang treibt, $4\frac{1}{2}$ Zoll Theilung haben müsse. Hieraus folgen $5\frac{2}{3}$ Zoll Theilung für ein Kammrad, welches zwei Mahlgänge treibt. Kammräder, welche mehr als zwei Mahlgänge treiben, sollten billig eiserne Kämme haben, weil für hölzerne die Theilung allzugroß ausfallen müßte.

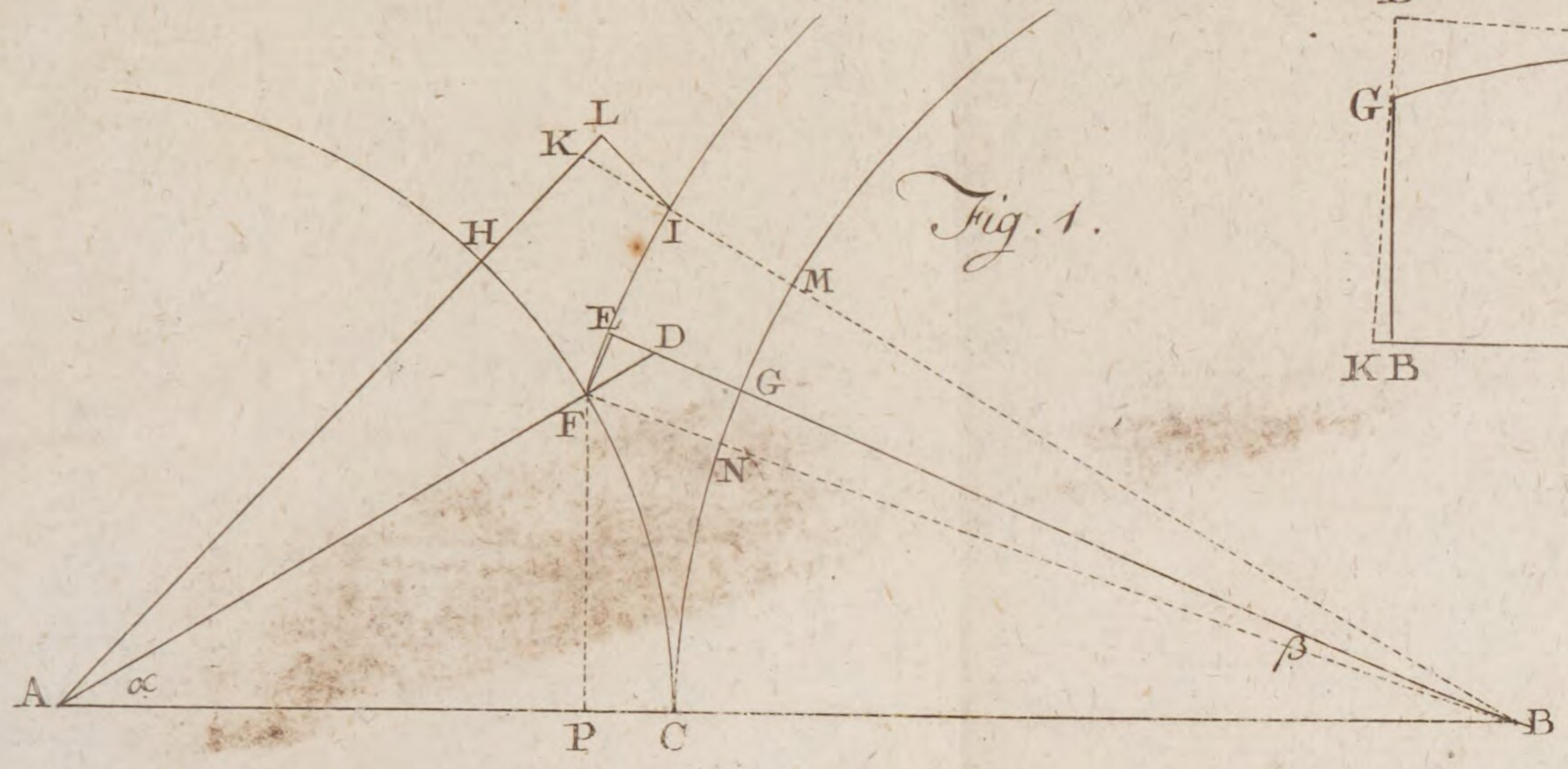

Fig. 1.

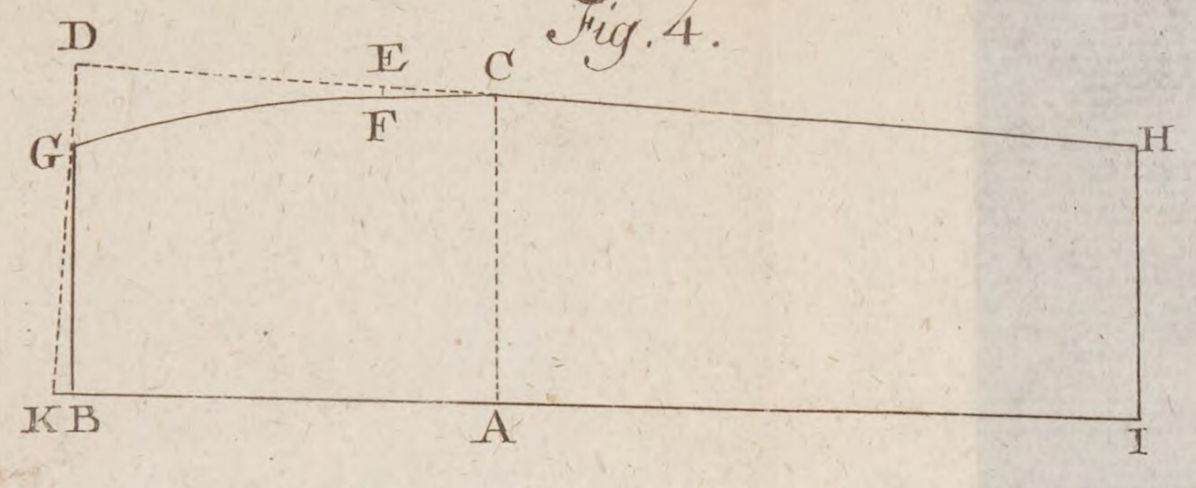

Fig. 4.

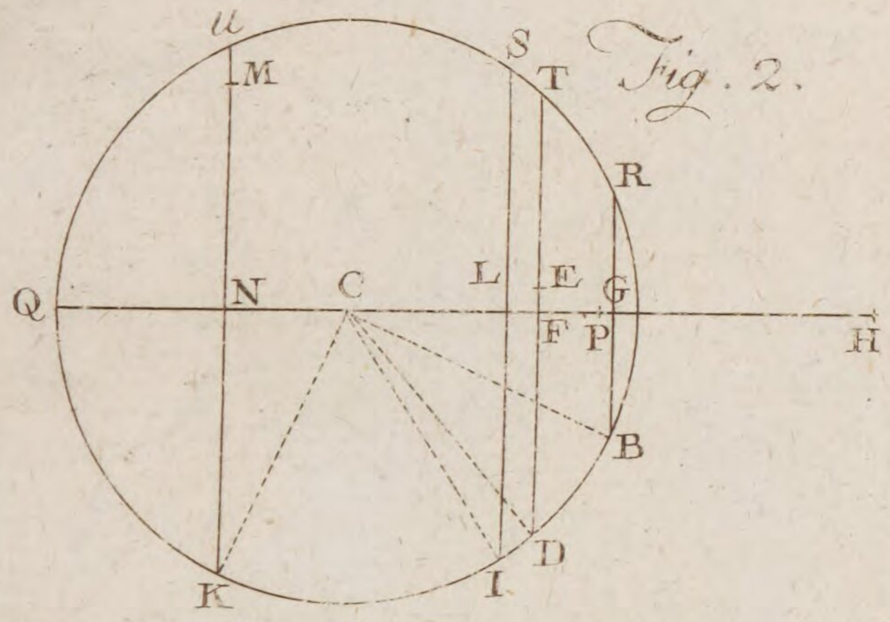

Fig. 2.

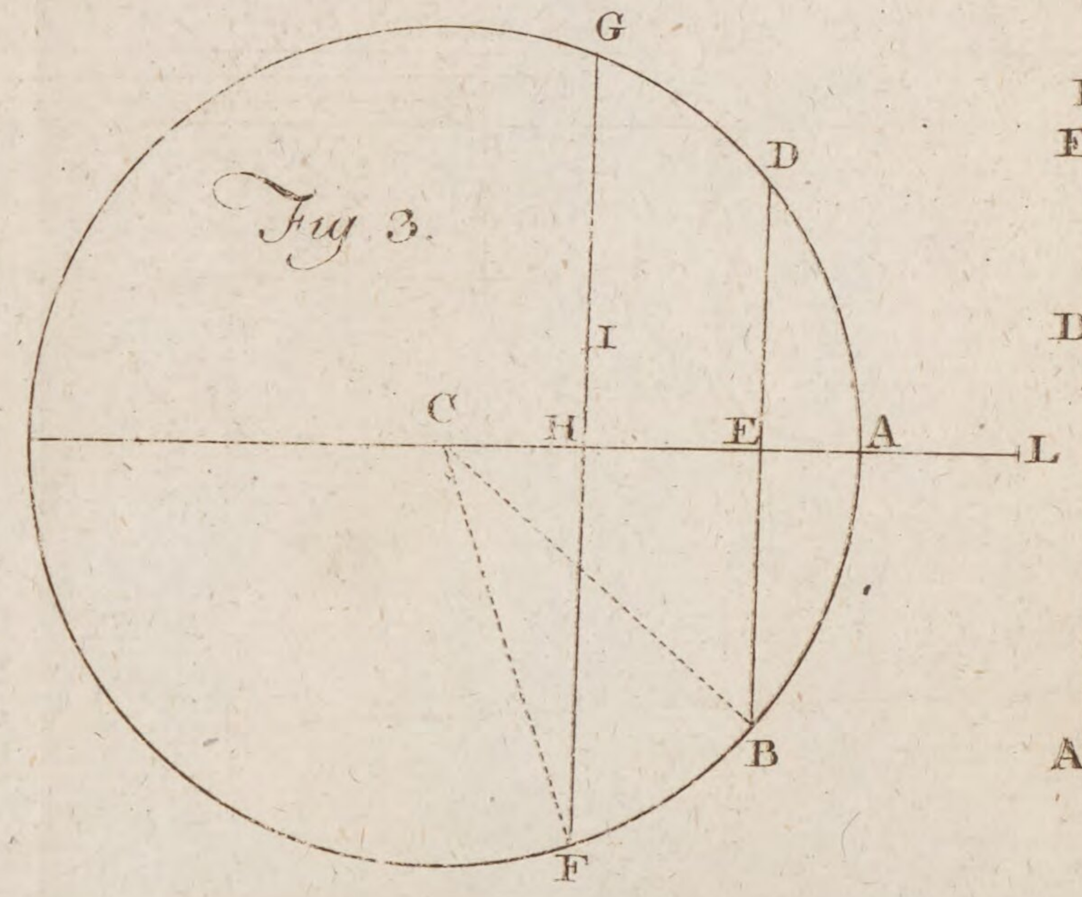

Fig 3.

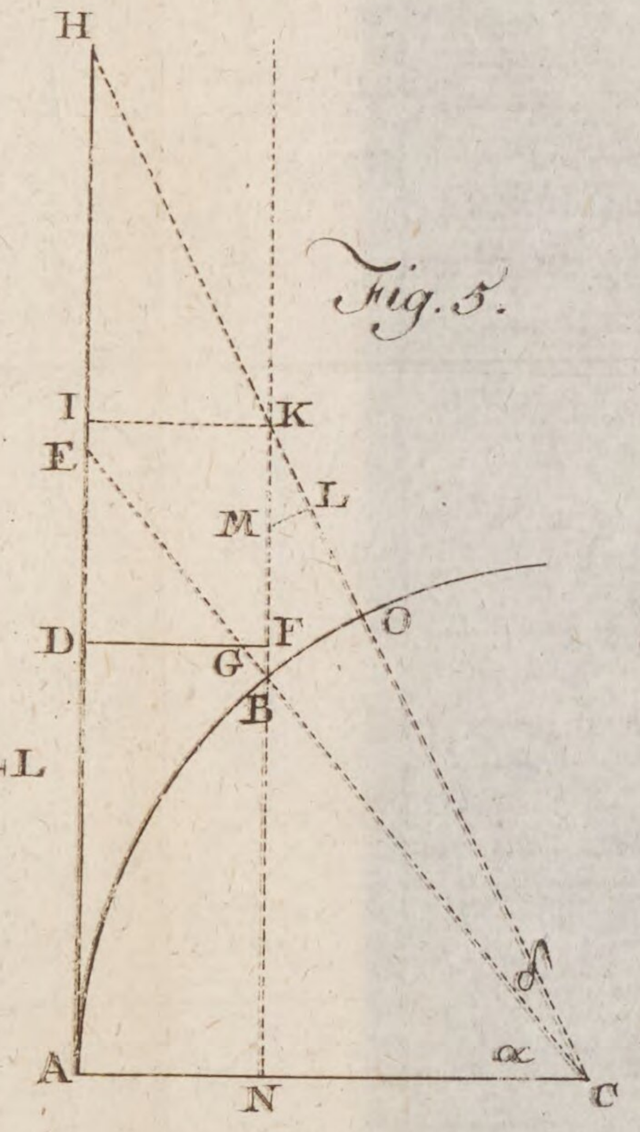

Fig. 5.

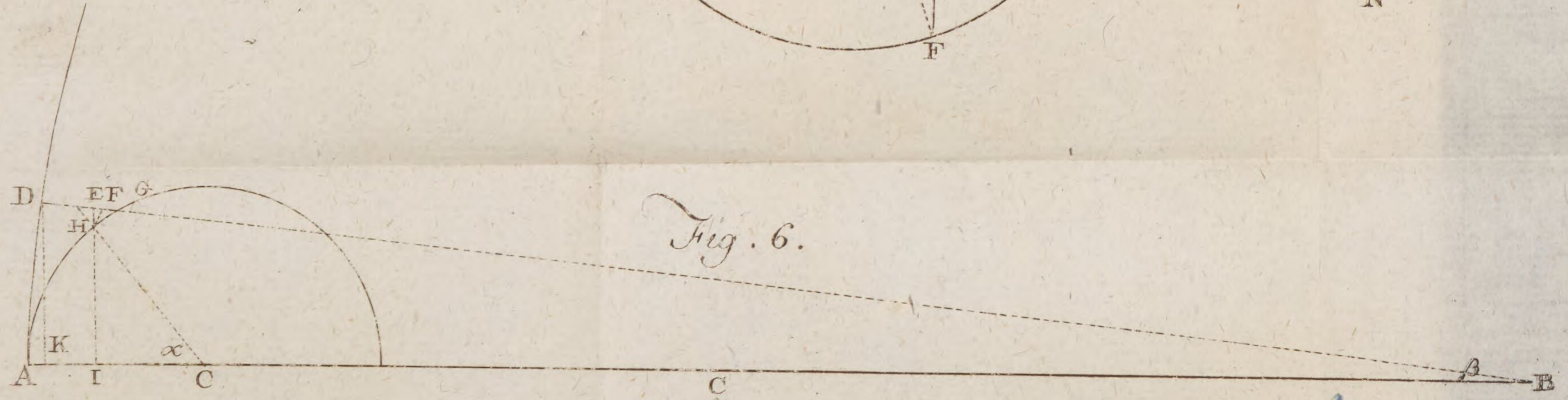

Fig. 6.

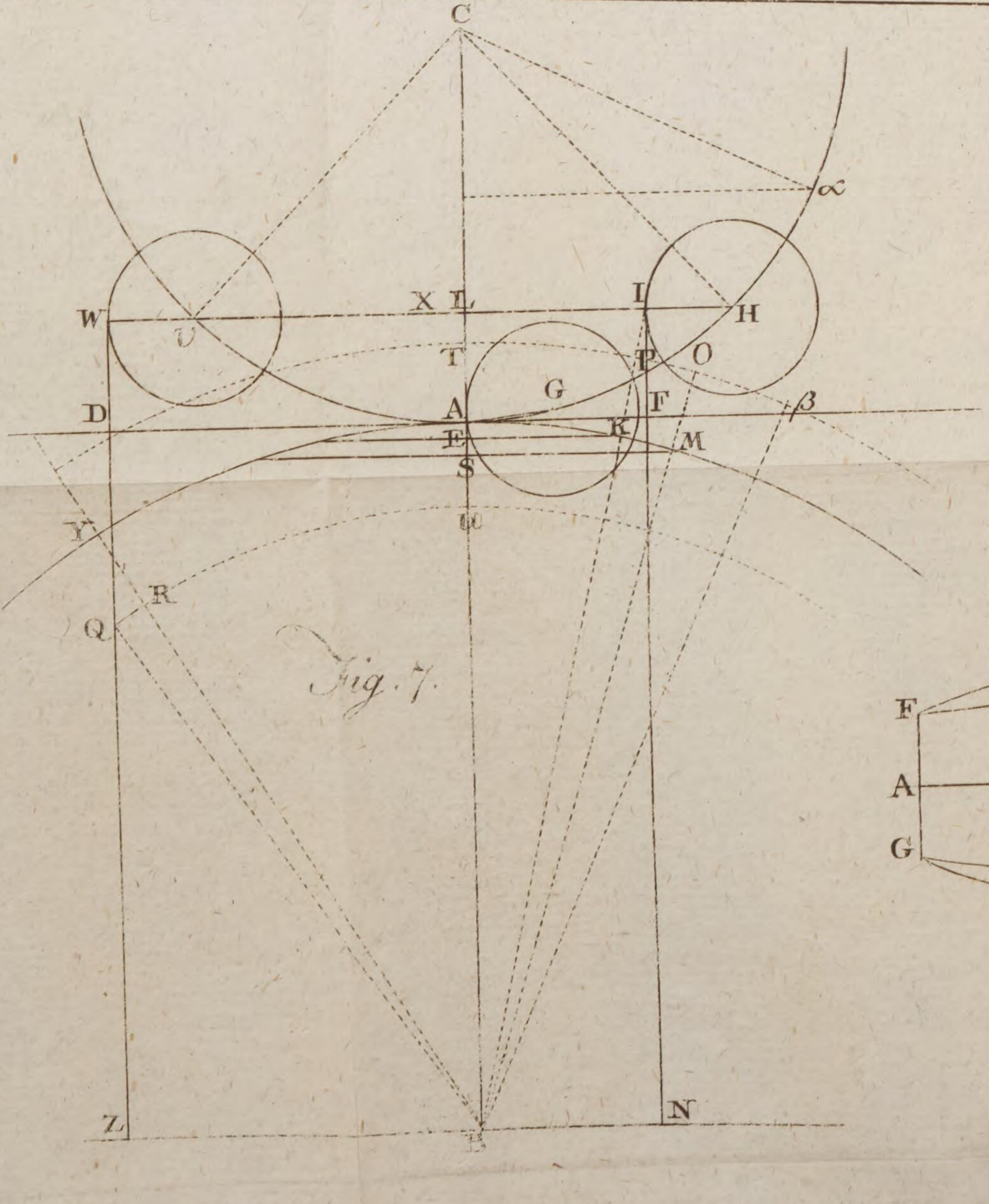

Fig. 7.

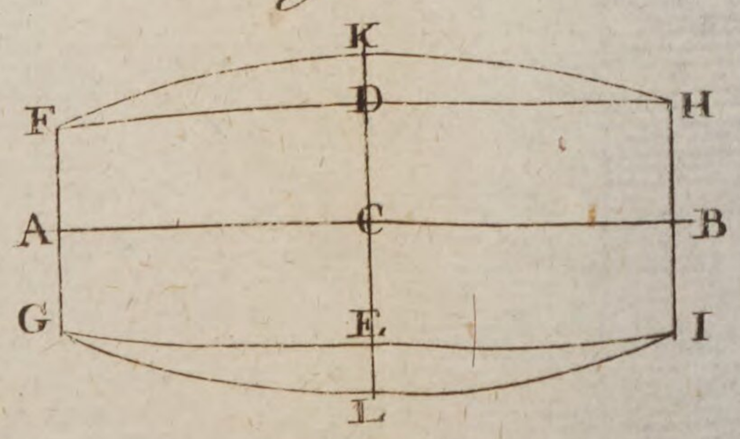

Fig. 8.

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Hoffmann, Johann Gottfried,

Anleitung zu Verzeichnung der Kämme des Räderwerks in Mühlen ein Anhang zu desselben Schrift: Der Wassermühlenbau mit besondrer Rücksicht auf Mahlmü hlen

Königsberg 1801

Coburg, Landesbibliothek -- B II 3
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11915860-0